

УДК: 004.942

ББК 32.973

Обнаружение и диагностика нарушений в линейных стохастических системах в процессе фильтрации: влияние схемы наблюдения на точность оценивания

Голубков Алексей Владимирович,

магистрант факультета физико-математического и технологического образования Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова.

г. Ульяновск, Россия.

Научный руководитель: **Цыганов Андрей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант №16-41-730784).

Аннотация. В рассмотрено влияние разных схем наблюдения на точность оценивания параметров режима движения объекта в условиях неполных зашумленных измерений. Смена режима движения происходит в известные моменты времени.

Проведено компьютерное моделирование и анализ эффективности схем наблюдения. Результаты применимы для решения задач слежения за подвижными объектами.

Ключевые слова: математическое моделирование, стохастические линейные системы, параметрическая идентификация, адаптивная фильтрация, дискретные модели стохастических систем, диагностика нарушений.

Введение

В настоящее время, задача адаптивного оценивания параметров режима движения объекта по сложной траектории в условиях неполноты измерений и зашумленности является актуальной в силу важности ее практических приложений.

Траектория движения мобильного робота имеет характер прямолинейного и/или кругового движения. Кроме того, данная модель движения находит применение в судовождении. Методы построения и оценивания параметров траектории движения робота с помощью дискретных линейных стохастических моделей могут применяться для решения задач слежения за движущимися объектами.

Сложность определения параметров движения состоит в том, что имеются только неполные зашумленные измерения, поступающие с внешнего измерительного устройства.

Для описания траектории объекта используется гибридная стохастическая линейная модель [3], в которой сложная траектория объекта рассматривается как комбинация трех возможных режимов движения: равномерного прямолинейного движения, равномерное движение по окружности с заданным радиусом при повороте влево, и равномерное движение по окружности при повороте вправо.

Благодаря такому подходу, нелинейная математическая модель движения объекта по сложной траектории заменяется набором линейных динамических моделей, что позволяет применять устойчивые к ошибкам округления дискретные алгоритмы калмановской фильтрации.

Рассмотрим $M = 2n + 1$ дискретных линейных стохастических моделей движения, каждая модель описывает прямолинейное движение или круговое движения с заданным радиусом, где n – число возможных радиусов.

В недавних работах [3],[7] были описаны математические линейные модели кругового равномерного движения влево/вправо на плоскости $Oxу$.

Введем четырехмерный вектор состояния параметров движения:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

где x_1 – координата объекта по оси Ox , x_2 – скорость объекта вдоль оси Ox , x_3 – координата объекта по оси Oy , x_4 – скорость объекта вдоль оси Oy .

Запишем уравнение движения объекта:

$$x_k = \Phi_k(i)x_{k-1} + B_k(r, i) + Gw_{k-1}, \quad k \in Z,$$

где k – дискретный момент времени, i – номер режима движения, r – радиус поворота, матрицы для режимов движения запишем в следующем виде:

$$\Phi_k(0) = \begin{bmatrix} \Phi_p & 0 \\ 0 & \Phi_p \end{bmatrix},$$

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_k(0, 0) = [0, 0, 0, 0]^T,$$

где $\tau = t_k - t_{k-1}$ – период дискретизации. Для движения по окружности с заданным радиусом влево ($i = 1$) и вправо ($i = 2$) матрицы будут иметь следующий вид:

$$\Phi_k(i) = \begin{bmatrix} \Phi_c(i) & 0 \\ 0 & \Phi_c(i) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_c(i) = \begin{bmatrix} \cos \omega_i \tau & \omega_i^{-1} \sin \omega_i \tau \\ -\omega_i \sin \omega_i \tau & \cos \omega_i \tau \end{bmatrix},$$

$$B_k(r, 1) = \begin{bmatrix} (x_{si} - \omega_i^{-1} v_{si,y})(1 - \cos \omega_i \tau) \\ (\omega_i x_{si} - v_{si,y}) \sin \omega_i \tau \\ (y_{si} + \omega_i^{-1} v_{si,x})(1 - \cos \omega_i \tau) \\ (\omega_i y_{si} + v_{si,x}) \sin \omega_i \tau \end{bmatrix},$$

$$B_k(r, 2) = \begin{bmatrix} (x_{si} + \omega_i^{-1} v_{si,y})(1 - \cos \omega_i \tau) \\ (\omega_i x_{si} + v_{si,y}) \sin \omega_i \tau \\ (y_{si} - \omega_i^{-1} v_{si,x})(1 - \cos \omega_i \tau) \\ (\omega_i y_{si} - v_{si,x}) \sin \omega_i \tau \end{bmatrix},$$

где $v_{si} = \begin{bmatrix} v_{si,x} \\ v_{si,y} \end{bmatrix}$ – вектор скоростей в точке с координатами (x_{si}, y_{si}) в момент изменения режима, τ – период дискретизации, $\omega_i > 0$ – модельный параметр, связанный с радиусом поворота r соотношением $r = |v_{si}|/\omega_i$.

Для всех моделей движения матрица перехода для белого гауссового шума:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Предположим, что измеряются только координаты объекта, скорости не измеряются, в моменты дискретного времени k доступны измерения z_k координат объекта, погрешность измерений моделируются гауссовым белым шумом с нулевым математическим ожиданием и диагональной ковариационной матрицей R .

$$z_k = Hx_k + v_k,$$

где H – матрица измерений, а v_k – вектор ошибок измерения координат. Вид матриц H и R зависят от используемой схемы наблюдения.

Алгоритм идентификации режима движения

Рассмотрим три гипотезы, определяющие модель движения объекта:

- Гипотеза H_0 – объект находится в режиме прямолинейного равномерного движения;
- Гипотеза H_1 – объект поворачивает налево, находится в режиме равномерного движения по окружности заданного радиуса;
- Гипотеза H_2 – объект поворачивает направо, находится в режиме равномерного движения по окружности заданного радиуса;

Основная идея алгоритма состоит в создании банка дискретных фильтров Калмана $\{F_i\}, i = 0, \dots, 2n$, в котором каждый фильтр оптимизирован для соответствующего режима движения. i – номер гипотезы, то есть номер фильтра.

$$\hat{x}_{k,i}^- = \Phi_k(i)\hat{x}_{k-1,i}^+ + B_k(r,i),$$

$$P_{k,i}^- = \Phi_k(i)P_{k-1,i}^+ + \Phi_k^T(i) + GQG^T$$

Обновление вектора измерений:

$$K_{k,i} = P_{k,i}^- H^T (HP_{k,i}^- H^T + R)^{-1},$$

$$P_{k,i}^+ = P_{k,i}^- - K_{k,i} H P_{k,i}^-,$$

$$v_{k,i} = z_k - H\hat{x}_{k,i}^-,$$

$$\hat{x}_{k,i}^+ = \hat{x}_{k,i}^- + K_{k,i} v_{k,i}$$

Решение задачи идентификации режима движения находится с помощью метода скорейшего обнаружения на основе последовательного критерия Вальда [2]. Предположим, что смена режима движения происходит в известные моменты времени.

Невязка измерений и ковариационная матрица невязки используются для вычисления отношений правдоподобий:

$$\lambda_{k,ij} = \lambda_{k-1,ij} + \mu_{k,ij}, k \geq 1,$$

где

$$2\mu_{k,ij} = (\log(|\Sigma_{k,j}|)) - \log(|\Sigma_{k,i}|) + v_{k,j}^T \Sigma_{k,j}^{-1} v_{k,j} - v_{k,i}^T \Sigma_{k,i}^{-1} v_{k,i},$$

$$\Sigma_{k,i} = H^T P_{k,i}^- H + R$$

Если α и β – вероятности ошибок первого и второго рода, тогда верхний и нижний порог решающего правила вычисляется по формулам:

$$A = \ln\left(\frac{1 - \beta}{\alpha}\right),$$

$$B = \ln\left(\frac{\beta}{1 - \alpha}\right)$$

Пусть I_{AB} – множество номеров режимов движения для активных фильтров, находящихся в банке фильтров на данной итерации алгоритма, тогда решающее правило для текущей итерации можно записать в следующем виде:

- Если $A > \lambda_{k,ij} > B$, переходят к следующей итерации алгоритма.
- Если $\lambda_{k,ij} \leq B$, то соответствующий номер режима исключают из множества I_{AB} , а соответствующий фильтр F_j удаляют из банка активных фильтров.
- Если все $\lambda_{k,ij}$ были исключены, завершают алгоритм с выбором номера режима движения H_j и соответствующего фильтра F_j .
- Если на текущей итерации сразу несколько $\lambda_{k,ij} \geq A$, то алгоритм завершают с выбором номера режима i , где $\lambda_{k,ij} = \max \lambda_{k,ij}$.

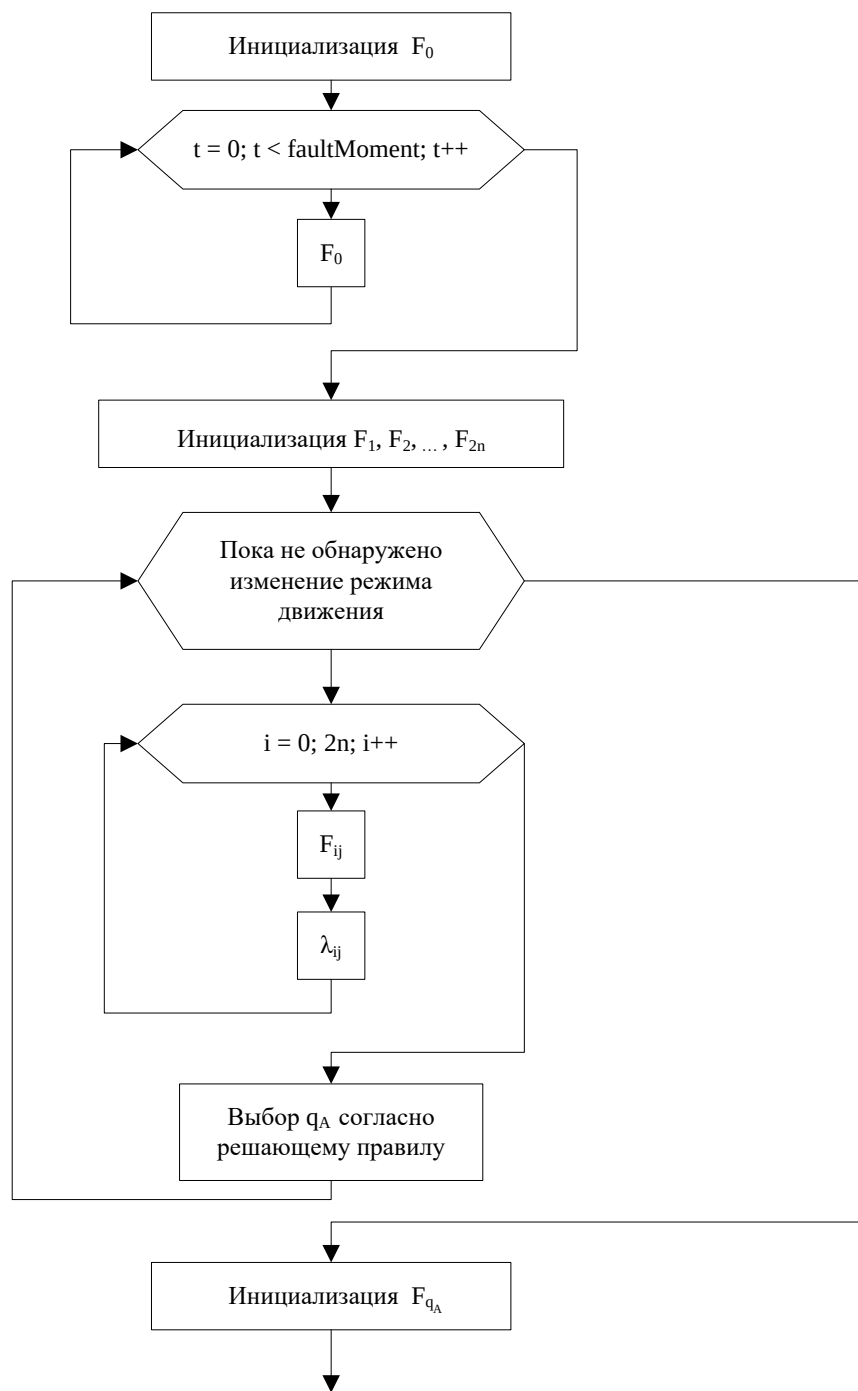


Рис. 1. Блок-схема реализации алгоритма

Блок-схема алгоритма идентификации режима движения представлена на рис.1. До момента смены режима движения параметры движения оцениваются по текущим измеренным данным с помощью дискретного фильтра Калмана F_0 , оптимального для модели равномерного прямолинейного движения. Во время смены режима движения происходит инициализация банка фильтров Калмана $\{F_i\}, i = 1, \dots, 2n$, каждый из которых оптимален для соответствующей модели равномерного кругового движения при повороте вправо или влево с одним из возможных значений радиуса поворота.

После выполняется вычисления отношений правдоподобия $\{\lambda_{k,i,j}\}$ для активных в текущей итерации алгоритма режимов движения. Далее проводится проверка решающего правила, если решение не принято, выполняется следующая итерация алгоритма, до тех пор, пока одно из значений $\lambda_{k,i,j}$ не пересечет верхнюю границу решающего правила с максимальным значением. Выбранный фильтр F_i заменяет фильтр F_0 , далее оценивание параметров выполняется с помощью этого фильтра.

Численные эксперименты

Рассмотрим сложную траекторию движения объекта, состоящую из следующих участков:

№	Тип движения	Время движения	Радиус
---	--------------	----------------	--------

Траектория состоит из пяти участков: объект движется в режиме прямолинейного движения (S) 50 тактов дискретного времени, затем совершает левый поворот (L) с радиусом 5 в течении 75 тактов. Далее следует прямолинейный участок длиной 50 тактов, после чего объект движется 75 тактов согласно модели криволинейного движения с правым поворотом и радиусом 3, завершает траекторию участок прямолинейного движения в 50 тактов. Таким образом, вся траектория движения объекта состоит из 300 тактов.

Моделирование траекторий производилось в программе «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0» [6]. Пример смоделированной траектории, соответствующей схеме движения табл.1 приведен на рис. 2, звездочками обозначены результаты наблюдения, красным цветом отмечены участки прямолинейного движения, синим – участки поворота налево, зеленым – участки поворота направо. Начальный вектор состояния параметров движения $x_{ik} = [0, 0, 0, 2]^T$, с ковариационной матрицей $R = \text{diag}[0.1, 0.1]$.

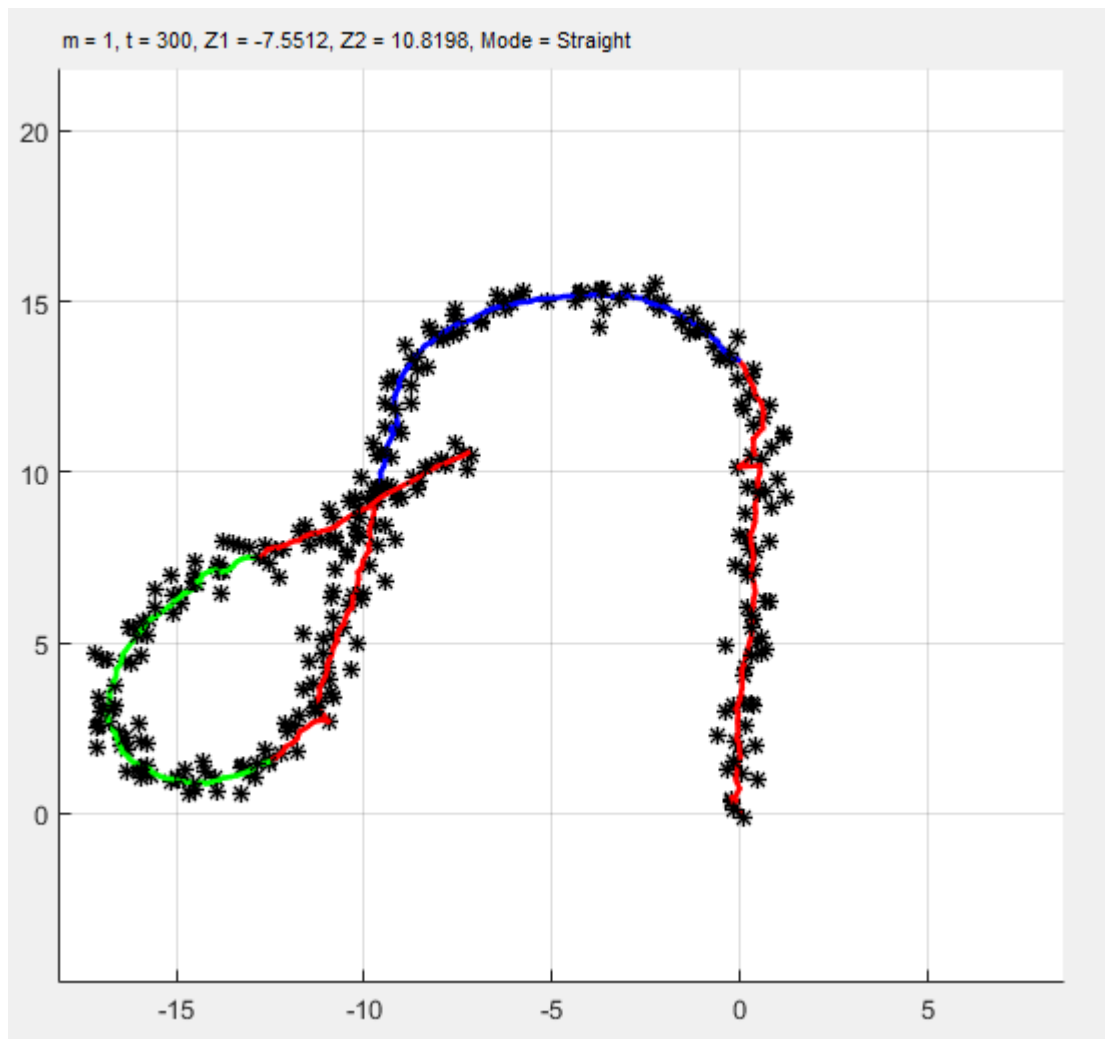


Рис. 2. Траектория движения объекта

Рассмотрим следующие схемы наблюдений:

1. Наблюдаются только координаты объекта: x_1 , x_3
2. Наблюдается x-координата объекта и скорость по оси Oх: x_1 , x_2

3. Наблюдается у-координата объекта и скорость по оси Oy: x_2, x_4
4. Наблюдаются координаты объекта и скорость по оси Ox: x_1, x_2, x_3
5. Наблюдаются координаты объекта и скорость по оси Oy: x_1, x_2, x_4
6. Наблюдаются все координаты и скорости объекта: x_1, x_2, x_3, x_4

Для этих случаев меняется матрица наблюдения H и ковариационная матрица R .

По описанной выше математической модели в программе на языке MATLAB[6] было сгенерировано 10 траекторий, в каждой по 300 точных векторов состояний объекта $x_{exact}(t_k)$, и зашумленных векторов наблюдения z_k . После чего описанным в работе алгоритмом адаптивной фильтрации были получены векторы оценки параметров объекта $\hat{x}_{k|k}$. Для полученных результатов оценки были вычислены $RMSE_{xi}$ (среднеквадратичные ошибки) оценки для каждой компоненты вектора по формуле [1]:

$$RMSE_{xi} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N (x_{i,exact}^j(t_k) - \hat{x}_{i,k}^{+,j})^2},$$

где $M = 10$, $N = 300$, $x_{i,exact}^j(t_k)$ и $\hat{x}_{i,k}^{+,j}$ – i -е сгенерированные векторы действительного положения объекта и их оцененное положение в j -м эксперименте.

В табл. 2 представлены результаты численного эксперимента, кроме $RMSE_x$ так же вычислено $nRMSE_x = \|RMSE_x\|_2$ – нормализованное по четырём координатам значение $RMSE_x$.

Из таблицы видно, что наименьшего среднеквадратичного отклонения, а, следовательно, и наилучших результатов определения параметров, удастся достичь при использовании всех четырех наблюдаемых параметров: двух координат и двух скоростей. Определение параметров движения по одной из координат и скорости (случаи 2 и 3) затруднительно, а среднеквадратичное

отклонение в этих экспериментах почти на порядок больше, чем в других случаях.

В случаях двух координат и одной из скоростей (случаи 4 и 5) лучший результат получается при использовании скорости по оси y , ввиду преобладания движения вдоль этой оси на траектории.

№ п/п	Наблюдаемые параметры	$RMSE_x$				$nRMSE_x$
		x_1	x_2	x_3	x_4	
1	x_1, x_3 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $R = \text{diag}(0.1, 0.1)$	0.2357	0.5209	0.5748	1.3196	1.5487
2	x_1, x_2 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R = \text{diag}(0.1, 0.1)$	0.4968	0.3977	75.2638	2.3192	75.3023
3	x_2, x_4 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \text{diag}(0.1, 0.1)$	116.5868	2.9305	0.0694	0.1588	116.6237
4	x_1, x_2, x_3 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $R = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$	0.0822	0.1453	0.6675	1.4242	1.5817
5	x_1, x_2, x_4 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$	0.2524	0.6435	0.0765	0.1661	0.7150

6	x_1, x_2, x_3, x_4 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$	0.0981	0.1565	0.0814	0.2006	0.2846
---	--	--------	--------	--------	--------	--------

Табл. 2. Влияние наблюдаемых параметров на
среднеквадратичную ошибку

Используемая литература

1. M. V. Kulikova and J. V. Tsyganova, "The UD-based approach for designing pairwise Kalman filtering algorithms," in Proceedings of the 20th IFAC World Congress, Toulouse, France, vol. 50, no. 1, 2017, pp. 1616–1624
2. Wald, Sequential Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1947, 212 p.
3. Семушин, И.В. Ориентированная на фильтрацию Калмана математическая модель установившейся циркуляции для анализа траектории цели / И.В. Семушин, Ю.М. Кроливецкая, Е.С. Петрова // Автоматизация процессов управления. – 2013. – №4 (34). – С. 14–20.
4. Цыганов А.В., Семушин И.В., Цыганова Ю.В., Голубков А.В., Винокуров С.Д. Метаэвристические алгоритмы в задаче идентификации параметров математической модели движущегося объекта // Автоматизация процессов управления. 2017. – № 1. с. 16–23

5. Семушин, И.В. Моделирование и оценивание траектории движущегося объекта И.В. Семушин, А.В. Цыганов, Ю.В. Цыганова, А.В. Голубков, С.Д. Винокуров // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10. – № 3. – С. 108–119.
6. Программный комплекс «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0». Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2016660550. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 сентября 2016 года. / А.В. Цыганов, Ю.В. Цыганова, С.Д. Винокуров, А.В. Голубков.