УДК: 519.85, 65.01

ББК: 22.18, 65.290

Многокритериальная оптимизация в принятии решений: пример применимости при подготовке учителя математики

Колганова Надежда Владимировна

Магистрант 2 курса факультета физико-математического и технологического образования, профиль «Методология математического образования»

Глухова Наталья Владимировна

Кандидат биологических наук, доцент кафедры высшей математики,

ФГБОУ ВО «Ульяновский Государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова», Ульяновск, Россия

Аннотация. В работе рассмотрен достаточно простой, но интересный пример задачи многокритериальной оптимизации, который может быть эффективно использован для повышения заинтересованности в изучении математики как при подготовке учителей математики (для студентов и магистрантов), так и для самих школьников. Работа представляет одну из возможных форм организации математического проекта, который могут выполнить сами студенты, планирующие в будущем стать учителями. Решив эту задачу самостоятельно или при помощи преподавателя, они в последующем смогут проводить аналогичную проектную работу со школьниками. Рассмотрены пять различных подходов к решению задачи, проведено сопоставление результатов и анализ применяемых методов.

Ключевые слова. Оптимизация, критерии, идеальная точка, граница Парето, производная, линейность.

Математические методы и модели находят самое широкое применение при принятии решений в самых различных областях. Без математических методов оптимизации уже достаточно давно невозможно представить ни экономику [18, с. 5], ни эффективный менеджмент [19, с. 12]. Математические модели применяются при принятии решений о признании научных теорий в биологии и при подтверждении результатов фармакологических исследований [11, с. 12, 22]; методы математического программирования применимы в сервисной деятельности [10, с 19–20], в экологии [8, с. 216] , в сельском хозяйстве [5, с. 10]. В то же время, как отмечается в работе [9, с 133] у школьников можно отметить представление о математике как о некотором абстрактном знании, которое не применяется на практике. Возможным выходом из ситуации является знакомство будущих учителей математики с методами теории принятия решений на практических примерах. Недостаток времени, отводимого на изучение математических дисциплин можно восполнить проектной деятельностью, как это предлагалось в работах [4, с. 179], [15, с. 161–165]. Подробнее с методикой организации проектной деятельности можно ознакомиться, например, в работах Т.Н. Куреневой [13, с. 181–183], [14, с. 296–298], [16, с. 147–148]. В настоящей работе мы приведём новый пример многокритериальной оптимизационной задачи, касающийся непосредственно деятельности школы, который может быть использован в качестве тематики проекта, а также разберем различные варианты решения данной задачи.

В качестве примера тематики возможного проекта рассмотрим следующую актуальную для школы задачу. Родители двоечников Васи Петрова и Пети Иванова договорились добавлять им деньги на новогодний подарок за каждую исправленную двойку. Дети обрадовались, но в итоге не пришли на дополнительные занятия. Выяснилось, что Петровы сказали, что они будут платить Васе 60 рублей за каждую исправленную двойку по русскому языку, и 50 – за исправленную двойку по математике. Ивановы же решили платить по 40 рублей за русский язык и по 80 – за математику. Поэтому Петя настаивал на том, чтобы они ходили только на математику, а Вася, понятно, только на русский. Когда им посоветовали ходить одному на русский, другому на математику, дети сказали, что они друг без друга никуда не пойдут.

Предложите наилучший план пересдач для детей, если они получили каждый по 9 двоек по русскому, и по 7 двоек по математике, до Нового года осталось две недели, то есть 12 рабочих дней, а за день можно исправить только одну двойку.

Составим математическую модель данной практической ситуации. Так как Вася и Петя решили ходить на передачи только совместно, удобно через x обозначить количество двоек по русскому языку, которые они попытаются пересдать, а через y – количество двоек по математике. Заработанную Васей (в случае успешной пересдачи) сумму обозначим U, а заработанную Петей V. Естественно, что каждый мальчик стремиться к максимизации своего критерия, что можно выразить в виде следующих формул:

$U = 60x + 50y \rightarrow \max$

$V = 40x + 80y \rightarrow \max$

Условия задачи накладывают на x и y следующие ограничения.

1) Так как общее количество пересданных каждым школьником двоек не может превышать количество дней, оставшихся до нового года

   $x + y \leq 12$

2) Количество пересданных двоек не может превышать количества имеющихся двоек, то есть

   $x \leq 9$

   $y \leq 7$

Естественно, значения переменных должны быть неотрицательными и целыми, то есть мы имеем дело с типичной задачей многокритериальной оптимизации. Применение лексикографического метода или метода субоптимизации [18, с. 63] [7, с. 26–27] невозможно, так как критерии равноправны (нельзя предпочесть интересы одного мальчика и пренебречь другим).

К решению данной задачи возможны несколько различных подходов, приводящих к разным результатам (как это типично для многокритериальной оптимизации [18, с. 58]).

Первый способ. Достаточно очевидный путь к нахождению компромисса между детьми состоит в «уравнивании» их в достижении цели. Если Вася больше хочет на русский язык, а Петя больше хочет на математику, всего же можно пересдать 12 двоек, то можно договориться сдать всего поровну, то есть половину дней потратить на математику, а вторую половину на русский язык (либо чередовать их, что не влияет на «прибыль»). Тогда Вася заработает U = 60·6 + 50·6 = 660 руб., а Петя заработает 40·6 + 80·6 = 720 руб. Результат будет достигнут, ученики смогут договориться между собой, но, как мы покажем далее, он отнюдь не будет оптимальным в данной ситуации (с точки зрения возможного «заработка»).

Второй способ. Система неравенств задаёт множество, которое представляет собой пятиугольник (рис. 1), вершины которого имеют следующие координаты: A(0,0), B(0,7), C(5;7), D(9;3), E(9, 0). Если Вася ставит перед собой цель пересдать как можно больше двоек по русскому языку, то для него оптимальным достижимым результатом будет x = 9. Для Пети же желательно сдать как можно больше двоек по математике, это приводит его к результату y = 7. Как видно на рис. 1 точка (9, 7) лежит вне допустимой области, поэтому идеальный результат для каждого в отдельности не достижим при условии, что они хотят ходить на пересдачи вместе. Поставим перед собой задачу найти на допустимом множестве точку ближайшую к точке (9, 7).

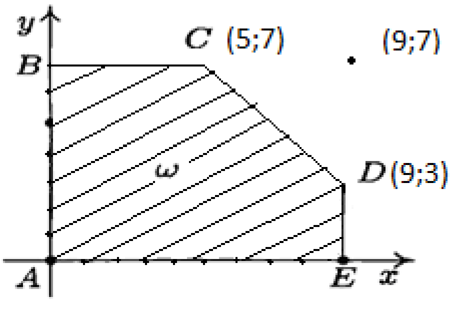

Рис. 1.

Из чертежа понятно, что точка, ближайшая к искомой находится на стороне CD. Запишем уравнение прямой *CD* по двум точкам. Уравнения прямой по двум точкам (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет вид:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (см, например [12, с. 29].

Подставим координаты точек А(5;7) и В(9;3) в формулу, получим уравнение:

$\frac{x-5}{9-5}=\frac{y-7_1}{3-7}$

x – 5 = –y + 7

x + y = 12.

Выразим одну из переменных: x = 12 – y. Таким образом, все точки, лежащие на прямой CD, имеют координаты (12 – y, y). Кроме того, точки должны лежать в пределах отрезка, то есть 3≤ y≤ 7

Расстояние r между искомой точкой (12 – y, y) и точкой (9;7) можно вычислить по формуле расстояния между двумя точками:

r = $\sqrt{(12-y-9)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(3-y)^2+(y-7)^2}$.

Замечая, что корень будет тем меньше, чем меньше подкоренное выражение, для нахождения минимума расстояния достаточно найти минимум подкоренного выражения, воспользовавшись для этого, например, производной функции $f(y) = (3 - y)^2 + (y - 7)^2 = 2y^2 - 20y + 58$.

$f^{/}(y) = (2y^2 - 20y + 58)^{/} = 4y - 20= 0$, откуда y = 5. Левее данной точки производная отрицательна, правее – положительна, следовательно, мы имеем точку минимума.

x = 12 – y = 7.

Итак, Васе и Пете можно предложить вместе пересдать 7 двоек по русскому языку и 5 двоек по математике. Вася заработает 60·7+50·5 = 670 руб, а Петя – 40·7+80·5=680. В итоге они получат более близкие суммы, что в большей мере способствует их равенству, однако такой исход наверняка не понравится Пете, так как Вася получит больше, чем в первом способе, а он меньше. Более того, если рассмотреть их суммарный выигрыш, то он окажется даже хуже во втором случае. Данный результат является ошибочным в следствие того, что мы стремились к максимуму пересданных двоек, а не к максимальному выигрышу (как было сформулировано в модели. Рассмотренное решение внешне сходно с методом идеальной точки [19, с 163], [17, с. 138–144], [7, с. 29–30], но таковым не является, так как в методе идеальной точки стремятся максимизировать именно целевые функции.

Третий способ. Метод отыскания идеальной точки заключается в отыскании на границе Парето, то есть на северо-западной границе множества [18, с. 57] [19, с 161] точки, ближайшей к так называемой точке утопии. Точкой утопии называется точка, в которой достигается максимум по каждому из критериев отдельно (обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому её и называют точкой утопии).

Наша задача – максимизировать U = 60x+50y и V = 40x+80y на множестве, определяемом системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le 7 \\ x + y \le 12 \end{cases}$$

Но нас интересуют не точки (x, y), а значения U и V. Преобразуем чертеж в эти новые координаты, которые являются критериями оптимальности в данной задаче. В силу линейности критериев *U* и *V* пятиугольник *ABCDE* (рис. 1) переходит в пятиугольник *A*B*C*D*E** (рис. 2), координаты вершин которого вычисляются по формулам для U и V при подстановке в них координат соответствующих вершин пятиугольника с рисунка 1. A* (0;0), B* (350;560), C* (650;760), D*(690;600), E*(540;360).

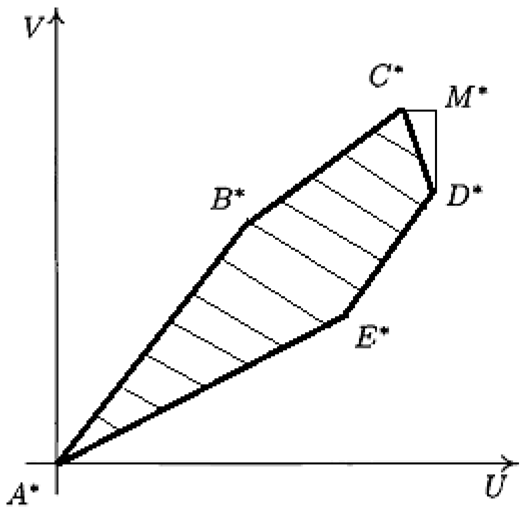

Рис. 2.

Находим границу Парето на рис. 2. Это отрезок *C*D**. Точка утопии *M** (690;760) (ее координаты – это наибольшие значения U и V в этом многоугольнике).

Требуется найти на множестве Парето точку, ближайшую к точке утопии *M**. Из рисунка видно, что искомая точка должна лежать на отрезке *C*D**. Запишем уравнение прямой *C* D** по двум точкам. Теперь осями координат являются не x и y, а u и v, подставляя координаты C*(650;760), D*(690;600) в формулу, получим уравнение

$$\frac{U-650}{690-650} = \frac{V-760}{600-760}$$

$40(V – 760) = –160(U – 650)$

$V = 26760 – 40U$.

Все точки прямой C*D* имеют координаты (U; 26760 – 40U). Кроме того, точки должны лежать в пределах отрезка C*D*, то есть $650 \le U \le 690$

По условию задачи нам нужно определить точку, расстояние которой от точки M*(690;760) минимально, то есть, как и в способе 2, найти минимум расстояния r до точки утопии M*(690;760):

$$r = \sqrt{(U-690)^2 + (26760-40U-760)^2} = \sqrt{(U-690)^2 + (26000-40U)^2}$$

Обозначая подкоренное выражение f(U), находим производную

$f'(U) = ((U – 690)^2 + (26000 – 40U)^2)' = 2(U – 690) + 80(26000 – 40U) =$

$= – 3198U + 2078620 = 0$,

откуда $U \approx 650$.

Вообще говоря, округление является вещью опасной для математического программирования, однако полученный результат U = 649,975 является очень близким к целому; он ещё и позволяет (как показано ниже), найти целочисленные x и y, мы воспользуемся данным результатом, ограничившись лишь проверкой его допустимости. При целочисленных количествах пересданных двоек дробные значения целевых функций U и V также не являются допустимыми. С методами целочисленного программирования можно ознакомиться, например, в работе [3, с. 53–55]). Используя U = 650, находим, что V = 760.

Итак, идеальным будет значение U = 650, V = 760. Чтобы найти значения x и y, подставим найденные значения в целевые функции U = 60x+50y и V = 40x + 80y решим систему

$60x + 50y = 650$

$40x + 80y = 760.$

После очевидных преобразований приходим к результату x = 5, y = 7. В итоге оптимальным решением для мальчиков будет решение: пересдать 5 двоек по русскому языку и 7 двоек по математике, при этом Вася получит 650 рублей, а Петя получит 760 рублей**,** а заодно и узнают практическую полезность метода координат и производных. Суммарный выигрыш в этом случае уже больше, чем в двух предыдущих и составляет 1410 руб. Здесь мы уже получили результат гораздо более выгодный для Пети, чем для Васи. Учитывая, что Вася вместо своих максимальных 690 рублей получит всего 650 рублей при том, что Петя получает свои максимально возможные 760 рублей, возможно, что Вася откажется от такого варианты.

Четвертый способ. Этот метод основан на построении обобщенного критерия при условии, что их относительные веса одинаковы [2, с. 45], [18, с. 65], так как «значимость» мальчиков равна. Раз уж они решили, что будут ходить на пересдачи вместе, можно рассмотреть и такой вариант: они договорятся выбрать вариант, приносящий наибольшую сумму, а полученные от родителей деньги поделят поровну между собой. То есть будем рассматривать не две функции (для каждого мальчика), а одну общую (для обоих):

$S = (60+40)x + (50+80)y = 100x+130y,$

Таким образом, мы преобразовали задачу от многокритериальной к обычной однокритериальной задаче линейного программирования, решаемой хорошо известными методами (см. [1, с. 53–55], [6. с. 7–9]). Видно, что увеличение y ведёт к более быстрому росту функции S, то есть «выгодно» исправить максимальное количество двоек по математике (у = 7) и оставшиеся дни пересдавать двойки по русскому языку. Таким образом, дети получат от родителей $100 \cdot 5 + 130 \cdot 7 = 1410$ руб. Разделив между собой деньги поровну, каждый получит по 705 рублей. Заметим, что суммарный максимальный выигрыш в данном случае совпал с результатом способа 3. Такой способ тоже хорош, однако, опять возникает вопрос, а почему Петя должен делить свои заработанные деньги с Васей поровну? Ведь в данной ситуации его родители оказались более щедрыми, оценивая его общие долги (если бы они пересдали все двойки, то Петя получил бы больше). Поэтому предложим ещё один способ разрешения данной ситуации.

Пятый способ. Метод базируется на результатах третьего способа. Недостатком этого исхода является возможное несогласие участвовать в нём Васи. Если не принимать в расчёт идею деления поровну, то лучшим результатом из предложенных вариантов решения для Васи является результат второго способа 670. Именно на нём он и имеет право настаивать (настаивать на способе четыре Вася вряд ли будет, так как требовать даже от лучшего друга, чтобы он делили с ним поровну деньги, полученные от родителей – как-то не красиво). Но в этом случае Петя получает значительно меньше (680 вместо 760), поэтому он может предложить Васе доплатить ему недостающие 20 рублей для достижения наилучшего для Пети результата (способ 3). При этом у Пети все же останется больше денег, чем при любом другом варианте решения (740 руб. вместо 680, 720 или 705), а Вася при этом ничего не теряет. Если же принять во внимание то, что способ 2 не совсем корректен, а также довольно сложен и двоечник Вася до него вряд ли додумается самостоятельно, то можно этот способ Васе и не показывать. Тогда его претензии не должны распространяться далее, чем до результата первого способа, откуда мы видим, что его максимальный результат – всего лишь 660 рублей, и предложенный Петей результат в 670 рублей уже будет для него более выгодным. Заметим, что в данном варианте Петя может даже позволить себе еще большую щедрость – доплатить Васе 30 рублей до его максимально возможного результата 690 руб. (большего как видно из рис. 2 ему все равно до Нового года не заработать). Тогда Петя все ещё получает 720 рублей, что не хуже никакого из представленных выше решений. Оставим, однако, данный вопрос на усмотрение щедрого Пети.

В заключение работы можно сделать некоторые философские выводы из представленного анализа. Во-первых, можно заметить, что революционный лозунг «свобода, равенство и братство» оказывается чаще всего невыгодным для кошельков всех участников процесса (вариант «свобода» приводит к нулевому результату, то есть к отсутствию пересдач, а результаты стремления к равенству – равное количество двоек (в способе 1) или примерно равному количеству «честно заработанных» денег (в способе 2) приводит к худшему результату, как по сумме выигрыша, так и по результатам каждого участника отдельно). Во-вторых, можно отметить материальную выгодность правильного применения математического инструментария (способ 3). Ну и наконец, можно заметить, что эгоизм, как это ни странно звучит, также не является материально выгодным, важно идти на уступки, причём делать это должен более «сильный» (в пятом способе Петя выступает в роли «сильного», так как он имеет в принципе возможность заработать больше, чем Вася). Сильный должен делиться со слабым, так как сильному это тоже выгодно.

Литература

1. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций: Учебное пособие. М.: Инфра-М, 2006. 352 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 2001. 206 с.
3. Верник А.Н., Эткин А.Е., Эткина Г.П. Математические методы и модели в экономике. Ульяновск, УлГТУ, 2008. 208 с.
4. Глухова Н.В. Возможные формы контроля при дистанционном обучении дисциплине «Математическое моделирование

биологических процессов» // Электронное обучение в непрерывном образовании. 2016. № 1 (3). С. 178-183.

5. Глухова Н.В. Математические модели для магистров-биологов: учебное пособие. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. 90 с.
6. Глухова Н.В. Методы оптимизации использования трудовых ресурсов. Учебное пособие. Ульяновск, ФГБОУ ВО УлГПУ, 2017. 50 с.
7. Глухова Н.В. Теория принятия решений: учебное пособие. / Глухова Н.В. – Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. – 48 с.
8. Глухова Н.В., Гришина С.А. Менеджериальные задачи как средство гуманитаризации математического образования // Гуманизация и гуманитаризация образования XXI века. Проблемы современного образования. Материалы 12-ой межд. науч.-метод. конф. памяти И.Н. Ульянова (19–20 октября 2011 г.). Ульяновск, УлГПУ, 2011. С. 215–217.
9. Глухова Н.В., Фолиадова Е.В. О применении задач с междисциплинарным содержанием при проведении олимпиад среди школьников и студентов // Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике в условиях стандартизации образования. Материалы Всерос. науч.-практ. конф. препод. мат., информ. школ и вузов. Ульяновск: УлГПУ, 2016. С. 133–139.
10. Гришина С.А., Инкин И. Перспективные линии в изучении курса математики у бакалавров, обучающихся по направлению подготовки "Сервис" // Физико-математическое образование: школа – вуз. материалы V региональной научно-практической конференции. 2016. С. 19–25.
11. Евстигнеев Д.А., Кузнецова И.В., Глухова Н.В. Анализ действия блокаторов калиевых каналов тетраэтиламмония и 4-аминопиридина на электрическую активность миелинизированных нервных волокон амфибий. – Ульяновск: УВАУ ГА, УлГПУ, 2009.

12..Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. Спб: Профессия, 2002. 200 с.
13. Куренева Т.Н. Защита проекта как форма итоговой аттестации студентов // Информационные технологии в образовании Материалы Международной заочной научно-практической конференции. Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова. 2012. С. 81–83.
14. Куренева Т.Н. Метод проектов и информационно-коммуникационные технологии // Информационные технологии в образовании Материалы Международной научно-практической конференции. Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова. 2011. С. 96–98.
15. Куренева Т.Н. Обучение будущих учителей организации проектной деятельности школьников // Сибирский педагогический журнал. 2015. № 2. С. 161–165.
16. Куренева Т.Н. Проектная деятельность в обучении математике студентов нематематических специальностей // Проблемы современного математического образования в высшей школе Материалы международной заочной научной конференции, 2013. С. 147-–149.
17. Плешко Н.В. Возможности применения графических интерпретаций при решении практических задач методами динамического программирования // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании. Международная научно-техническая конференция (Россия, Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.). С. 138–144
18. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. – М.: Высшая школа, 2002. 288 с.
19. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. М.: Дело. 2004. 440 с.