УДК 521

ББК 22.632

Экспоненциально-степенная инфляция в (1+1)-мерной космологии

Червон Сергей Викторович,

Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики и технических дисциплин;

Майорова Татьяна Игорьевна, Ассистент, кафедры физики и технических дисциплин, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова,

Фатахов Азат Асхатович

Аспирант кафедры физики и технических дисциплин, 2 год обучения, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова,

г. Ульяновск, Россия

Аннотация.

В настоящей работе обсуждается вопрос записи уравнений Эйнштейна и скалярного поля в разных сигнатурах, чтобы избежать неточного сопоставления с работами других авторов. Также рассматриваются вопросы построения точных решений в (1+1)-мерной космологии и найдены новые примеры точных решений с использованием метода точной настройки потенциала.

Ключевые слова: гравитация, космология, двухмерное пространство-время, скалярное поле, инфляция

1. *Сигнатуры пространства-времени для скалярного поля в (1+3)-мерии.*

Скалярные поля играют важную роль в космологии и активно используются в моделях космологической инфляции. Мы рассматриваем (1+1)-мерную космологию, в связи с разработкой и совершенствованием методов построения точных решений. Наличие точных решений связано с удивительной возможностью вычисления ключевых космологических параметров без обращения к теории космологических возмущений в стандартной (1+3)-мерной космологии [1]. Исследование (1+1)-мерной скалярной космологии также позволяет установить допустимые потенциалы самодействия $V(\phi)$, которые могут рассматриваться в (1+3)-мерии [2].

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения точных решений в (1+1)-мерной космологии и найдены новые примеры точных решений с использованием метода точной настройки потенциала [3].

Как известно, в рамках ОТО используются два варианта лоренцевой сигнатуры пространства-времени:
$(-+++)$=: $m3p$ и $(+---)$=:$p3m$. Первый вариант, в последовательности $(+++-)$ практически использовался в работах Эйнштейна, например в работе 1911 года [4].

Второй вариант $p3m$ получил широкое распространение благодаря популярности одного из первых трудов по теоретической физике-многотомника Ландау Л.Д. и Лифшица Е.М. «Теоретическая физика» [5].

Рассмотрим определение тензора энергии-импульса (ТЭИ) по учебнику [3], формула (94.4):

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mathrm{ab}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{\mathrm{ab}}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{c}}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{\mathrm{ab}}_{,\mathrm{c}}} \quad (1)$$

Лагранжевую плотность для канонического скалярного поля в сигнатуре $p3m$ выбираем в виде:

$$L_F \equiv \Lambda = \frac{1}{2}\,\phi_{,\mathrm{a}}\phi^{,\mathrm{a}} - V(\phi), \quad (2)$$

что приводит к ТЭИ скалярного поля

$$\mathrm{T}_{\mathrm{ab}} = \phi_{,a}\phi_{,b} - g_{ab}\left(\frac{1}{2}\,\phi_{,\mathrm{c}}\phi^{,\mathrm{c}} - V(\phi)\right). \quad (3)$$

При использовании сигнатуры $m3p$ в формуле (2) меняем знак перед кинетическим членом на противоположный:

$$L_F \equiv \Lambda = -\frac{1}{2}\,\phi_{,\mathrm{a}}\phi^{,\mathrm{a}} - V(\phi). \quad (4)$$

Тогда ТЭИ вновь описывается формулой (3) с изменением знака перед кинетической частью

$$\mathrm{T_{ab}} = -\phi_{,a}\phi_{,b} + g_{ab}\left(\frac{1}{2}\,\phi_{,\mathrm{c}}\phi^{,\mathrm{c}} + V(\phi)\right), \tag{5}$$

что совпадает с прямым вычислением по формуле (1).

2. *Скалярная космология в (1+1)-мерии.*

В данной работе выполняется построение точных решений для (1+1) мерной космологии со скалярным полем, методом, предложенным в работе [6]. В работе [6] получены точные решения для различных эволюций масштабного фактора. Были исследованы: степенная эволюция $a = a_0 t^m$; экспоненциальная эволюция $a = a_0 e^{\lambda t}, H = \lambda$; гиперболические эволюции $a = a_0 \cosh^{\alpha} \lambda t$; $a = a_0 \sinh^{\alpha} \lambda t$; тригонометрические эволюции $a = a_0 \cos^{\alpha} \lambda t$; $a = a_0 \sin^{\alpha} \lambda t$. При этом получены новые формы потенциала $V(\phi)$:

$V\big(\phi(t)\big) = m(m-1)t^{-2}$; $V(t) = \lambda^2$; $V(t) = \alpha\lambda^2\{(\alpha-1)\tanh^2 \lambda t + 1\}$;
$V(t) = \alpha\lambda^2\{(\alpha-1)\coth^2 \lambda t + 1\}$; $V(t) = \lambda^2$; $V(t) = \alpha\lambda^2\{(\alpha-1)\tan^2 \lambda t - 1\}$;
$V(t) = \alpha\lambda^2\{(\alpha-1)\cot^2 \lambda t - 1\}$.

Коротко опишем метод, предложенный в работе [6]. Рассматривается следующее действие:

$$S_{GSF} = \int d^2x\,\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2}\phi_{,a}\phi_{,b}g^{ab} - V(\phi)\right\}. \tag{6}$$

Метрика двухмерного пространства-времени такова:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2. \tag{7}$$

Источником (1+1)-мерной гравитации является самодействующее скалярное поле с тензором энергии-импульса:

$$T_{ab} = -\phi_{,a}\phi_{,b} + g_{ab}\left(\frac{1}{2}\phi_{,c}\phi^{,c} + V(\phi)\right). \tag{8}$$

След тензора-энергии импульса

$$T = 2V(\phi), \tag{9}$$

Известно [7], что в пространстве-времени двух измерений тензор кривизны имеет следующее представление

$$R_{abcd} \equiv -\frac{1}{2}(g_{ab}g_{cd} - g_{bc}g_{ad})R, \tag{10}$$

откуда следует

$$R_{ab} \equiv \frac{1}{2} g_{ab} R, \tag{11}$$

что означает тождественное обращение в ноль тензора Эйнштейна $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$. Следовательно, $T_{ab} = 0$ при выборе любой метрики и нет динамической составляющей гравитации в пространстве 2-х измерений.

Двухмерную динамическую теорию гравитации можно получить, следуя работе [2], исходя из действия,

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R\Psi}{2\kappa} + \frac{1}{2} \Psi_{,a} \Psi_{,b} g^{ab} - V(\Psi) \right\}, \tag{12}$$

где Ψ – другое скалярное поле.

Мы варьируем относительно Ψ и $g_{\mu\nu}$, тогда получаем соответствующие уравнения [8]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a \left[\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \Psi \right] - R = 0 \tag{13}$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\Psi_{;a}\Psi_{;b} - \frac{1}{2} g_{ab} \Psi_{;c} \Psi^{;c} \right) + g_{ab} g^{cd} \Psi_{;c;d} - \Psi_{;c;d} = \kappa T_{ab} \tag{14}$$

где (***;***) означает ковариантную производную.

Что бы привести к уравнению (13), левую часть (14) умножим со сверткой на g^{ab}, в этом случае мы получим

$$\Psi_{;c}^{;c} = g^{cd} \Psi_{;c;d} = \kappa T_{ab} g^{ab} \tag{15}$$

Учитывая, что $\Psi_{;c}^{;c} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a \left[\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b \Psi \right]$ сопоставляя (15) и (13), находим

$$R = \kappa T, \tag{16}$$

Уравнение поля может быть представлено в виде

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \tag{17}$$

В метрике (7) уравнение (16) принимает вид

$$\frac{a_{tt}}{a} = V(\phi) \tag{18}$$

Уравнение поля (17) приводится к виду

$$\phi_{tt} + H\phi_t + \frac{dV}{d\phi} = 0, \tag{19}$$

$$H = \frac{a_t}{a}. \tag{20}$$

Вводя новую функцию

$$y = \phi_t^2 > 0, \tag{21}$$

мы получаем

$$\frac{1}{2}y_t + Hy + \frac{dV}{dt} = 0. \tag{22}$$

Общая форма решения уравнение имеет вид [5]:

$$y = -2a^{-2}\left(\int a^2 \frac{dV}{dt}dt - C_0\right) \tag{23}$$

Здесь C_0 – выделенная постоянная интегрирования, в которой учитывается все интегралы в дальнейшем без постоянных.

3. Экспоненциально-степенная эволюция масштабного фактора.

В дальнейшем мы рассмотрим, экспоненциально-степенную эволюцию масштабного фактора как обобщения результатов работы [5].

$$a = a_s e^{At} t^m, \quad A, a_s = const\,, m > 0 \tag{24}$$

Что бы воспользоваться общим решением (24)

$$V(\phi) = \frac{a_{tt}}{a}. \tag{25}$$

Параметр Хабла принимает вид

$$H = \frac{a_t}{a} = A + \frac{m}{t}. \tag{26}$$

Потенциал на основе заданного масштабного фактора (24) из уравнения (16)

$$V(t) = \frac{a_{tt}}{a} = A^2 + \frac{2}{t}Am + m(m-1)t^{-2} \tag{27}$$

Из данного выражения мы можем найти производную по времени, которая встречается в интеграле (23)

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2Am}{t^2} - \frac{2m(m-1)}{t^3} \tag{28}$$

Так, выражение (23) принимает вид

$$y=-2a^{-2}\left(\int -a^2\left(-\frac{2Am}{t^2}-\frac{2m(m-1)}{t^3}\right)dt+C_0\right)$$

$$=\frac{2}{a_s^2e^{2At}t^{2m}}\left(a_s^2(2Am\int e^{2At}t^{2m-2}dt+2m(m-1)\int e^{2At}t^{2m-3}dt)+c_0\right) \quad (29)$$

Результат интегрирования представляет сложное выражение со спецфункциями гамма

$$y=\frac{2}{e^{2At}t^{2m}}\left[-2A^2m\,2^{1-2m}\,(-A)^{-2m}\left(\frac{t^{2m}(-A)^{2m}(-At)^{-2m}\Gamma(2m)}{2m-1}-\frac{2^{2m-1}t^{2m-1}(-A)^{2m}e^{2At}}{(2m-1)A}-\frac{t^{2m}(-A)^{2m}(-At)^{-2m}\Gamma(2m,-2At)}{2m-1}\right)+2m(m-1)2^{2-2m}(-A)^{-2m}A^2\left(\frac{t^{2m}(-A)^{2m}(-At)^{-2m}\Gamma(2m)}{2(m-1)(2m-1)}+\frac{2^{2m-3}t^{2m-2}(-A)^{2m}(-2At+2m-1)e^{2At}}{(m-1)A^2(2m-1)}-\frac{t^{2m}(-A)^{2m}(-At)^{-2m}\Gamma(2m,-2At)}{2(m-1)(2m-1)}\right)+C_0\right] \quad (30)$$

Рассмотрим несколько простых случаев.

1) Представим, что *m=1*, то получим следующее решение

$$y=\frac{2}{a_s^2e^{2At}t^2}(a_s^2(2A\int e^{2At}t^{2-2}dt)+C_0)=\frac{2}{t^2}+\frac{2C_0}{a_s^2e^{2At}t^2} \quad (31)$$

При этом зависимость $\phi(t)$ имеет вид, когда $C_0=0$

$$\phi=\sqrt{2}\ln(t) \quad (32)$$

2) Рассмотрим второй случай *m=3/2*. Определяем $y=\dot{\phi}^2$

$$y=\frac{2}{a_s^2e^{2At}t^3}(a_s^2(3A\int e^{2At}tdt+\frac{3}{2}\int e^{2At}dt)+C_0)=$$

$$=\frac{3}{t^2}+\frac{2C_0}{a_s^2e^{2At}t^3} \quad (33)$$

При этом зависимость $\phi(t)$, когда $C_0=0$ представлена следующим образом

$$\phi=\sqrt{3}\ln(t) \quad (34)$$

4. Экспоненциально-степенная эволюция масштабного фактора

$$a=a_se^{\lambda t^p} \quad (35)$$

Находим первую производную

$$a_t=a_sp\lambda t^{p-1}e^{\lambda t^p} \quad (36)$$

и параметр Хаббла для данного случая

$$H(\phi) = \frac{a_t}{a} = p\lambda t^{p-1} \tag{37}$$

Находим вторую производную выражения (35)

$$a_{tt} = a_s p\lambda((p-1)t^{p-2}e^{\lambda t^p} + t^{p-1}p\lambda t^{p-1}e^{\lambda t^p}) \tag{38}$$

Подставим a_{tt} и a в выражение, и получаем потенциал $V(\phi)$

$$V(t) = p\lambda t^{p-2}(p - 1 + p\lambda t^{p+1}) \tag{39}$$

Дифференцируем выражение (39) по *t:*

$$\frac{dV}{dt} = p\lambda((p^2 - 4p + 2)t^{p-3} + 2p\lambda(2p-1)t^{2p-2} \tag{40}$$

Подставляем дифференциал в интеграл (23) и получаем вид

$$y = \left(-\frac{2p\lambda}{e^{\lambda t^p}}(p^2 - 4p + 2)\int t^{p-3}\, e^{2\lambda t^p}dt - \frac{4p^2\lambda^2}{e^{\lambda t^p}}(2p-1)\int t^{p-1}\, e^{2\lambda t^p}dt\right) - \\ -C_0 \tag{41}$$

1) Для нахождения интегралов функции *y* рассмотрим простые значения параметра $p = 2 \pm \sqrt{2}$

При этом коэффициент при первом интеграле обращается в ноль, а выражение (41)

$$y = \mp\left(20\lambda \pm 14\lambda\sqrt{2}\right)\int t^{1\pm\sqrt{2}}\, e^{2\lambda t^{2\pm\sqrt{2}}}dt \tag{42}$$

После интегрирования, получаем вид функции *y*

$$y_1 = 2\lambda(10 - 7\sqrt{2}) \tag{43}$$

$$y_2 = -2\lambda(10 + 7\sqrt{2}) \tag{44}$$

и явный вид ϕ согласно нашему определению (21) y>0, мы отбрасываем y_2. Находим явный вид зависимости ϕ от времени *t:*

$$\phi_2 = \sqrt{2\lambda(10 - 7\sqrt{2})t} \tag{45}$$

2) Так же рассмотрим случай, когда параметр *p=3*

Подставим параметр *p* в уравнение (23) и будем иметь

$$y = \left(6\frac{\lambda}{e^{\lambda t^3}}\int e^{\lambda t^3}dt - 180\frac{\lambda^2}{e^{\lambda t^3}}\int t^2 e^{2\lambda t^3}dt\right) - C_0 = \\ = \left(2\lambda^2 t^4 - 15\lambda e^{\lambda t^3}\right) - C_0 \tag{46}$$

В данном случае интегрирование и представление в $\phi(t)$ приведет к сложному подкоренному интегралу, в этом случае вопрос остается открытым.

Библиографический список

1. Sergey V. Chervon and Igor V. Fomin, On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation // Gravitation and Cosmology, v. 14, (2008) 163, 2007 – 5 p.

2. Beesham and S.V. Chervon, New exact solutions for nonlinear scalar fields in (1+1) dimensins // Gravitation and Cosmology, Vol. 3 (1997), No 3(11) – p. 172-174

3. S.V. Chervon, V.M. Zhuravlev, V.K. Shchigolev, New exact solutions in standard inflationary models // Physics Letters, B398 (1997) – p. 269-273 [arXiv:gr-qc/9706031]

4. Альберт Эйнштейн, собрание научных трудов в четырех томах, т. I, Издательство «Наука», Москва, 1965, стр. 175-186

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов., В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 536 С. – ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II).

6. С.В. Червон, И.В. Фомин, А.С. Кубасов. Скалярные и киральные поля в космологии // С.В. Червон, И.В. Фомин, А.С. Кубасов – Ульяновск, ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2015 – 216 с. [ISBN 978-5-86045-832-1]

7. K.C.K.Chan and R.B.Mann. Cosmological models in two spacetime dimensions // Classical Quantum Gravity 10. Ontario, Canada: University of Waterloo, (1993) – p. 913-930. Printed in the UK

8. R.B. Mann. The simplest black holes // Foundations of Physics Letters, Vol. 4, No. 5, 1991 – Ontario, Canada: University of Waterloo, 1991 – p. 425-449

9. S.V. Chervon and I.V. Fomin, The method of generating functions in exact scalar field cosmology // Gravitation and Cosmology, 2017 – 22 p. [arXiv:1704.08712]