

## **Некоторые задачи геометрии поверхностей с различными фундаментальными группами**

**Абдреева Гельназ Габдулловна,**

студентка магистратуры 1 курса Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова

г. Ульяновск, Россия

Научный руководитель:

**Фолиадова Елена Викторовна,**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова

**Аннотация.** В работе рассмотрены элементы геометрии поверхностей с различными фундаментальными группами.

**Ключевые слова:** геометрия Евклида, сферическая геометрия, геометрия цилиндра, фундаментальная группа.

Известно, что топологические свойства многообразий проявляются, в частности, в строении их фундаментальных групп. С другой стороны, некоторые аспекты метрической геометрии (например, евклидовой) имеют топологическую природу. Возникает вопрос, какие свойства геометрии различных многообразий связаны с особенностями их фундаментальных групп. В работе этот вопрос изучается на примере поверхностей, вложенных в трёхмерное евклидово пространство: плоскости (евклидова планиметрия), сферы (сферическая геометрия), бесконечной круговой цилиндрической поверхности (цилиндрическая геометрия) и тора (тороидальная геометрия). В частности, рассматриваются классические теоремы Чевы и Менелая и их аналоги в геометрии различных поверхностей. Как плоская, так и сферическая теоремы Менелая были известны ещё в эллинистической математике [3]; в

данной работе новой является скорее постановка вопроса о связи этих и других результатов с топологическими свойствами соответствующих поверхностей. Этот подход допускает перенос на случай двумерных и трёхмерных многообразий, вложенных в четырёхмерное пространство, а также гиперповерхностей более высокой размерности. Учитывая представления современной космологии о строении пространства [6], можно допустить, что роль таких рассматриваний в какой-то мере аналогична использованию Менелаем и Птолемеем теорем, ныне носящих их имена, для расчета расстояний на небесной сфере.

Основные идеи, использованные в работе, доступны учащимся старших классов, и одна из целей работы – наметить возможные направления исследований школьников по геометрии и алгебре.

Как известно [3], фундаментальная группа  $\pi_1(T)$  топологического пространства  $T$  есть множество классов гомотопных (переходящих друг в друга при непрерывной деформации) петель, выходящих из фиксированной точки пространства. В евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  со стандартной топологией есть только один гомотопический класс петель (все петли непрерывной деформацией стягиваются в точку), так что фундаментальная группа тривиальна,  $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 1$ . На окружности  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = R\}$ , где  $\|x\|$  – евклидова норма, каждый гомотопический класс состоит из петель, которые навиваются на окружность заданное число раз; это число может быть положительным или отрицательным в зависимости от направления. Следовательно, фундаментальная группа окружности (одномерной сферы) изоморфна аддитивной группе целых чисел:  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Однако при любом  $n > 1$  фундаментальная группа  $n$ -мерной сферы  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = R\}$  тривиальна:  $\pi_1(S^n) = 1$ .

Тор  $T^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\|x\|^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x_1^2 + x_2^2)\}$  с точки зрения топологии можно рассматривать как произведение двух окружностей  $S^1 \times S^1$ . Окружность – линейно связное топологическое пространство, следовательно,

фундаментальная группа тора  $\pi_1(T^2)$  изоморфна произведению  $\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Рассмотрим бесконечный цилиндр  $C^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$ , основанием которого является окружность  $S^1$ . Цилиндр можно рассматривать как произведение окружности  $S^1$  и числовой прямой  $\mathbb{R}$ , так что фундаментальная группа цилиндра  $\pi_1(C^2)$  изоморфна произведению  $\pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times 1 = \mathbb{Z}$ .

В метрической геометрии поверхностей приходится вводить расстояние между точками, т.е. длину кратчайшей линии на поверхности, соединяющей эти точки. Роль прямых на произвольной поверхности играют геодезические линии, которые можно определить так: для любых двух не слишком удаленных друг от друга точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих геодезической линии, ее часть  $AB$  короче любой другой линии, соединяющей  $A$  с  $B$  и лежащей на поверхности (см., напр., [1]). Таким образом, геодезические – это «локально кратчайшие» линии на поверхности. Ясно, что геодезические линии на евклидовой плоскости – это обычные прямые, причём они являются и «глобально кратчайшими», т.е. задают расстояние между любой парой своих точек.

На сфере кратчайшей из всех линий, соединяющих точки  $A$  и  $B$ , является меньшая дуга  $AmB$  (рис. 1) окружности большого круга, т.е. сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы ([1], [5]). Убедиться в этом можно либо с помощью сферического неравенства треугольника (см. ниже), либо

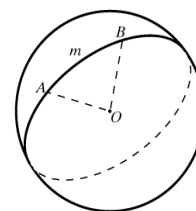


Рис. 1.

непосредственно решая задачу минимизации функционала длины дуги.

Рассмотрим для этого карту сферы (рис. 2)

$$x = (R \cos \varphi \sin \theta ; R \sin \varphi \sin \theta ; R \cos \theta), \varphi \in (-\pi; \pi), \theta \in (0; \pi),$$

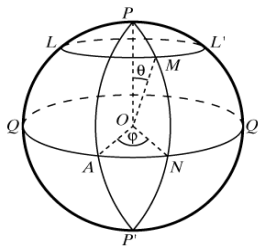


Рис. 2.

внутри которой лежат заданные точки  $A(\varphi_A, \theta_A)$  и  $B(\varphi_B, \theta_B)$ . Если линия на сфере, соединяющая  $A$  и  $B$ , определяется уравнением  $\theta = \theta(\varphi)$ , то на этой линии

$$dx = (-R \sin \varphi \sin \theta d\varphi + R \cos \varphi \cos \theta d\theta;$$

$$R \cos \varphi \sin \theta d\varphi + R \sin \varphi \cos \theta d\theta; -R \sin \theta d\theta) = \\ = R(-\sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \cdot \theta'; \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta \cdot \theta'; -\sin \theta \cdot \theta')d\varphi;$$

$$dl = \|dx\| = R\sqrt{\sin^2 \theta + (\theta')^2}d\varphi; L = R \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\sin^2 \theta + (\theta')^2}d\varphi.$$

Функционал  $L = L(\theta)$  принимает наименьшее значение на линии, для которой  $\theta = \theta(\varphi)$  является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{\sin^2 \theta + (\theta')^2} - \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta'} \sqrt{\sin^2 \theta + (\theta')^2} \right) = 0,$$

откуда в силу отсутствия явной зависимости подынтегральной функции от аргумента  $\varphi$  получаем  $\theta' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'} (\sqrt{\sin^2 \theta + (\theta')^2}) - \sqrt{\sin^2 \theta + (\theta')^2} = C_1,$

$$(\theta')^2 = \frac{\sin^4 \theta}{C_1^2} - \sin^2 \theta; \frac{d\theta}{d\varphi} = \pm \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{\sin^2 \theta}}; \frac{d(\text{ctg } \theta)}{\sqrt{\frac{1}{C_1^2} - 1 - \text{ctg } \theta}} = \pm d\varphi,$$

и общее решение уравнения можно записать в виде  $\text{ctg } \theta = k \cos(\varphi - \varphi_0)$ , где

$k = \pm \sqrt{\frac{1}{C_1^2} - 1}$ . Задавая полученную кривую параметрически:

$$x = \left( \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{k^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + 1}}; \frac{R \sin \varphi}{\sqrt{k^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + 1}}; \frac{Rk \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{k^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + 1}} \right),$$

замечаем, что

$$R \cos \varphi \cdot k \cos \varphi_0 + R \sin \varphi \cdot k \sin \varphi_0 - Rk \cos(\varphi - \varphi_0) = 0,$$

так что вектор  $x$  при всех  $\varphi \in (-\pi; \pi)$  лежит в плоскости с нормальным вектором  $(\cos \varphi_0; \sin \varphi_0; -1)$ , проходящей через начало координат. Итак,

геодезическими линиями («прямыми») на сфере оказываются большие окружности.

Через любые две точки на сфере, кроме диаметрально противоположных, можно провести единственную сферическую прямую, а через диаметрально противоположные точки проходит бесконечное множество прямых. Таким образом, любые две сферические прямые пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, т.е. в сферической геометрии не существует понятия параллельности. Кроме того, в отличие от евклидовой прямой, сферическая прямая замкнута, и точка не разбивает её на две части. Пара точек на сферической прямой определяет сферический отрезок как меньшую из двух дуг окружности; сферическое расстояние между точками (длина отрезка)  $L = R\alpha$

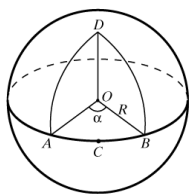


Рис. 3.

определяется радианной мерой центрального угла  $\alpha$  (рис. 3). Любая точка  $C$  сферического отрезка  $AB$  разбивает его на два, и сумма их длин равна длине всего отрезка:

$$AOC + COB = AOB.$$

Для любой точки  $D$  вне отрезка  $AB$  имеет место неравенство треугольника:  $AOD + DOB > AOB$  (свойство трёхгранного угла евклидовой стереометрии). Из неравенства треугольника следует, что сферический отрезок короче любой сферической ломаной, а значит, и любой кривой на сфере, соединяющей его концы; мы получили ещё одно доказательство того факта, что геодезические линии сферы – это большие окружности.

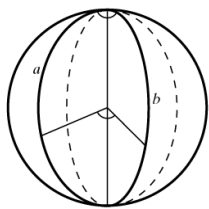


Рис. 4.

При пересечении двух сферических прямых  $a$  и  $b$  на сфере образуются четыре двуугольника (рис. 4); каждому из них соответствует двугранный угол, образованный диаметральными плоскостями, содержащими  $a$  и  $b$ . Угол между прямыми определяется как меньший из этих углов; очевидно, он равен углу между касательными к окружностям

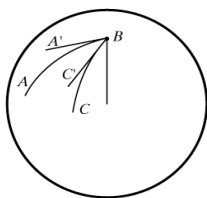


Рис. 5.

в точке В их пересечения (рис. 5), поскольку эти касательные лежат в касательной плоскости сферы, перпендикулярной радиусу  $OB$ . Углы между сферическими прямыми не превосходят  $\pi/2$ .

Три больших окружности, пересекаясь попарно в трёх точках, образуют на сфере восемь сферических треугольников; принято рассматривать один из них, тот, у которого все стороны меньше половины большой окружности (рис. 6). Стороны треугольника измеряются плоскими углами трехгранного угла  $OABC$ , углы треугольника – его двугранными углами.

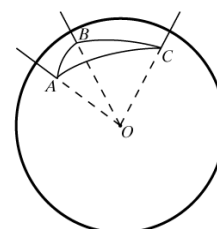


Рис. 6.

Каждой точке сферы естественно сопоставляется луч, проведенный из центра сферы в эту точку, а любой фигуре на сфере – объединение всех пересекающих ее лучей. Так, сферической прямой соответствует содержащая ее плоскость, сферическому отрезку – плоский угол, двугольнику – двугранный угол, треугольнику – трёхгранный угол. Многогранный угол с вершиной в центре сферы пересекает сферу по сферическому многоугольнику (рис. 7). Это область на сфере, ограниченная ломаной из сферических отрезков.

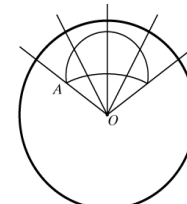


Рис. 7.

Сферическая окружность – множество точек сферы, равноудаленных от заданной точки  $P$ . Окружность лежит в плоскости, перпендикулярной диаметру сферы  $PP'$  (рис. 8), т.е. это обычная плоская окружность с центром на диаметре  $PP'$ . Но сферических центров у нее два:  $P$  и  $P'$ . Эти центры принято называть полюсами.

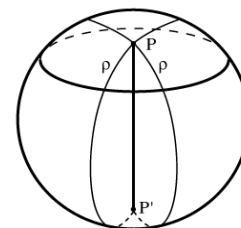


Рис. 8.

Если диаметр  $r$  сферической окружности равен  $\pi/2$ , то сферическая окружность превращается в сферическую прямую (называемую полярной каждой из точек  $P$  и  $P'$ ). Сферической окружности в евклидовом трёхмерном пространстве соответствует коническая поверхность, ось которой проходит через полюсы окружности.

Как известно, многие свойства плоских треугольников и окружностей вместе с их доказательствами переносятся на их сферические аналоги [5]. Основой здесь является понятие равенства фигур (фигуры равны, если одну можно отобразить на другую движением) и признаки равенства треугольников. Так, сохраняется характеристика серединного перпендикуляра к отрезку как множества точек, равноудалённых от его концов, откуда следует существование и единственность описанной окружности любого сферического

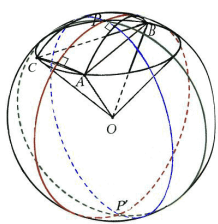


Рис. 9.

треугольника (рис. 9), а также характеристика биссектрисы двугульника как множества точек, равноудалённых от его сторон – следовательно, в любой сферический треугольник можно вписать окружность, и её центр (точнее, пара её полюсов) лежит на пересечении биссектрис. Теоремы о

пересечении высот и медиан треугольника также остаются верными.

Однако к известным трем случаям равенства треугольников на сфере добавляется еще и четвертый: два треугольника равны, если равны их соответственные углы. Таким образом, на сфере не существует подобных треугольников, более того, в сферической геометрии нет самого понятия подобия,

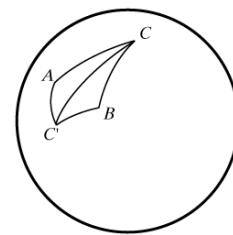


Рис. 10.

т.к. не существует преобразований, изменяющих все расстояния в одинаковое (не равное 1) число раз. Эти особенности связаны с нарушением аксиомы параллельных и присущи также геометрии на псевдосфере, т.е. геометрии Лобачевского. Однако в сферической геометрии имеется понятие симметрии: треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию (например, треугольники AC'C и BCC' на рис. 10), называются симметричными. Имеется также аналог параллельного переноса (перенос вдоль геодезической, т.е. поворот вокруг центра сферы).

Сумма углов всякого сферического треугольника больше  $180^\circ$ . Разность  $A + B + C - \pi = d$  (измеряемая в радианах) называется сферическим избытком данного сферического треугольника. Площадь сферического треугольника  $S =$

$R^2 d$ , где  $R$  – радиус сферы, а  $d$  – сферический избыток (формула Жирара), что легко доказывается сравнением площадей восьми треугольников, образованных тремя данными прямыми (см., напр., [2]).

Как известно, в евклидовой планиметрии указанные выше теоремы о конкурентности биссектрис, медиан, высот треугольника являются частными случаями теоремы Чевы, которая, наряду с теоремой Менелая, широко применяется для решения задач. Теорема Менелая утверждает, что если

прямая пересекает треугольник  $ABC$ , причем  $C_1$  – точка ее пересечения со стороной  $AB$ ,  $A_1$  – точка ее пересечения со стороной  $BC$  и  $B_1$  – точка ее пересечения с продолжением стороны  $AC$  (рис. 11),

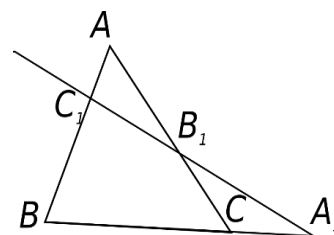


Рис. 11.

то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство этого утверждения на плоскости обычно проводится с применением параллельности прямых и подобия треугольников и, следовательно, не переносится на сферический случай. Однако уже Менелай Александрийский знал сферический аналог этой теоремы [3]. Попробуем предположить, как он мог её доказывать. Спроектируем рисунок 10 из центра сферы на ее поверхность (рис. 12). Из треугольников  $OBC_1$  и  $OC_1A$ :

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{\triangle OC_1A}}{S_{\triangle OBC_1}} = \frac{OA \cdot \sin |AC_1|}{OB \cdot \sin |C_1B|}$$

из треугольников  $OBA_1$  и  $OA_1C$ ,  $OAB_1$  и  $OB_1C$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{\triangle OBA_1}}{S_{\triangle OA_1C}} = \frac{OB \cdot \sin |BA_1|}{OC \cdot \sin |A_1C|}$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{\triangle OB_1C}}{S_{\triangle OAB_1}} = \frac{OC \cdot \sin |CB_1|}{OA \cdot \sin |B_1A|}$$

По плоской теореме Менелая

$$1 = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{OA \cdot \sin |AC_1|}{OB \cdot \sin |C_1B|} \cdot \frac{OB \cdot \sin |BA_1|}{OC \cdot \sin |A_1C|} \cdot \frac{OC \cdot \sin |CB_1|}{OA \cdot \sin |B_1A|} =$$

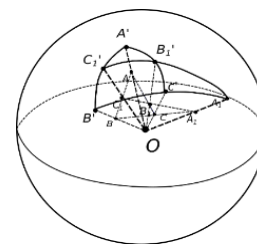


Рис. 12.



$$= \frac{\sin|AC_1|}{\sin|C_1B|} \cdot \frac{\sin|BA_1|}{\sin|A_1C|} \cdot \frac{\sin|CB_1|}{\sin|B_1A|}$$

Таким образом, для любого сферического треугольника, пересеченного сферической прямой, справедлива теорема Менелая в форме

$$\frac{\sin|AC_1|}{\sin|C_1B|} \cdot \frac{\sin|BA_1|}{\sin|A_1C|} \cdot \frac{\sin|CB_1|}{\sin|B_1A|} = 1.$$

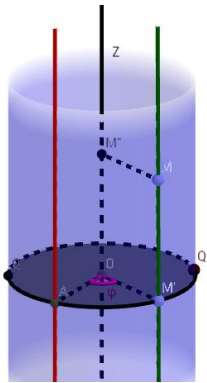


Рис. 13.

Рассмотрим теперь элементы цилиндрической геометрии. Сечение бесконечного цилиндра любой плоскостью – эллипс (окружность, если плоскость перпендикулярна образующим) либо пара прямых (если плоскость параллельна образующим). Зададим карту цилиндра (рис. 13). Зафиксируем некоторый круг  $QQ'$  (экватор), образованный пересечением цилиндра и плоскости, перпендикулярной образующим. Через центр  $O$  окружности  $QQ'$  проводим прямую  $OZ$ , перпендикулярную к  $QQ'$ . Зафиксируем образующую, проходящую через точку  $A$ , принадлежащую  $QQ'$  (первая образующая). В качестве одной из координат точки  $M$  на цилиндре принимается угол  $\varphi = \angle AOM'$  между первой образующей и образующей, проходящей через точку  $M$ , в качестве второй – длина отрезка  $OM''$  (высота точки). Бесконечный цилиндр локально изометричен полосе, ширина которой равна длине экватора цилиндра (рис. 14).

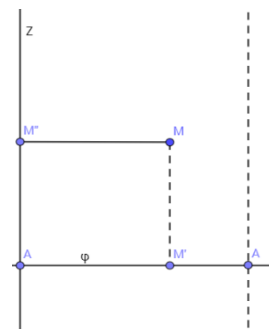


Рис. 14.

Определим, как выглядят геодезические на цилиндре. Возможны три случая расположения двух точек цилиндра друг относительно друга (рис. 15).

1. Две точки  $A'$  и  $B'$  лежат на одной из образующих  $l$ . В этом случае кратчайшей из всех линий на цилиндре, соединяющих точки  $A'$  и  $B'$ , является отрезок  $A'B' \subset l$ . Таким образом, можно сделать вывод, что образующие являются геодезическими на цилиндре.

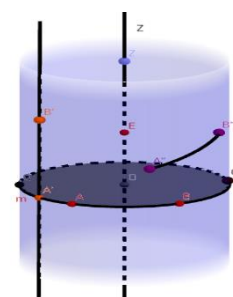


Рис. 15.

2. Две точки  $A$  и  $B$  лежат на плоскости, перпендикулярной образующим. В этом случае меньшая дуга  $AmB$  окружности является кратчайшей из всех линий на цилиндре, соединяющих заданные точки.

3. Две точки  $A''$  и  $B''$  не принадлежат одной образующей и не лежат в плоскости перпендикулярной образующим (рис. 15). В этом случае кратчайшей из всех линий на цилиндре, соединяющих точки  $A''$  и  $B''$ , является часть одной из винтовых линий, проходящих через эти две точки, длина которой является наименьшей. Уравнение геодезических линий, проходящих через две заданные точки, можно задать параметрически:

$$x = (\cos \varphi ; \sin \varphi ; a + \varphi \operatorname{tg} \alpha), \varphi \in \mathbb{R},$$

где  $\alpha$  – угол между винтовой линией и плоскостью, перпендикулярной образующим,  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . При  $\alpha = 0$  получаем уравнение для линий, описанных в пункте 2:  $x = (\cos \varphi ; \sin \varphi ; a), \varphi \in \mathbb{R}$ . Через любые две точки проходит бесконечно много геодезических линий, но только одна геодезическая определяет кратчайшее расстояние между двумя точками.

В геометрии цилиндра через точку, не лежащую на данной цилиндрической прямой, можно провести одну прямую, параллельную данной.

Длина отрезков, подобных  $AB$ , определяется через радианную меру центрального угла  $\alpha$  и радиус основания цилиндра  $R$  (рис. 16), по формуле длины дуги она равна  $L_{AB} = R\alpha$ . Любая точка  $C$  отрезка  $AB$  разбивает его на два, и сумма их длин равна длине всего отрезка.

Длина отрезков, подобных  $A'B'$ , определяется через расстояние между точками  $A'$  и  $B'$  на образующей (рис. 16),

$$L_{A'B'} = |z_2 - z_1|, \quad \text{где } z_1, z_2 \text{ - координаты } z \text{ точек } A' \text{ и } B' \text{ соответственно в системе}$$

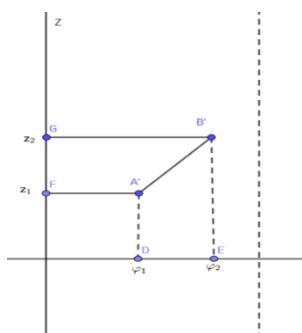


Рис. 18

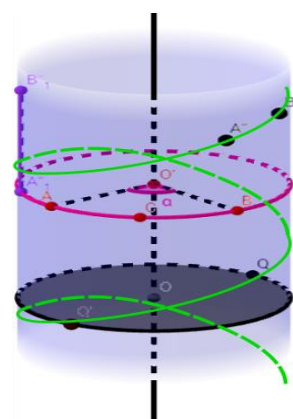


Рис. 16

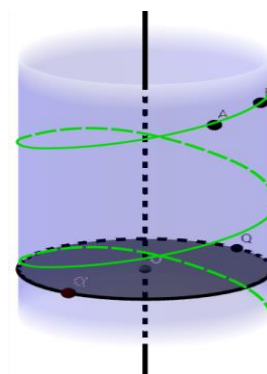


Рис. 17

координат, заданной выше. Любая точка  $C'$  отрезка  $A'B'$  разбивает его на два, и сумма их длин равна длине всего отрезка, т.е.  $A'C' + C'B' = A'B'$ .

Определим длину отрезков, подобных  $A'B''$  (рис. 17), т.е.  $\rho_{\text{ц}}(A, B)$ ,  $A(\varphi_1, z_1), B(\varphi_2, z_2)$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi; \pi]$  Спроектируем эти точки на полосу (рис.18), которой локально изометричен цилиндр. Точка  $A$  перейдет в точку  $A'(\varphi_1, z_1)$ , точка  $B$  перейдет в точку  $B'(\varphi_2, z_2)$ .  $\rho_2(A', B') = \sqrt{(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ , так как цилиндр изометричен полосе. Итак,

$$\rho_{\text{ц}}(A, B) = \sqrt{(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Определим длину участка геодезической линии

$$x = (\cos \varphi ; \sin \varphi ; a + \varphi \operatorname{tg} \alpha), \varphi \in \mathbb{R}: \quad x' = (-\sin \varphi ; \cos \varphi ; \operatorname{tg} \alpha),$$

$$dl = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} d\varphi = \frac{d\varphi}{\cos \alpha}, \quad \Delta l = \frac{1}{\cos \alpha} \Delta \varphi.$$

Для любой точки  $D$  вне отрезков  $AB, A'B', A''B''$  имеет место неравенство треугольника. Из этого неравенства следует, что цилиндрический отрезок короче любой цилиндрической ломаной, а значит, и любой кривой на цилиндре, соединяющей его концы.

Цилиндрическая окружность – множество точек цилиндра, равноудаленных от заданной точки  $P$ .

Углы на цилиндре определяются следующим образом.

При пересечении двух цилиндрических прямых  $a$  и  $b$  образуются углы (рис. 19). Градусная мера углов определяется углом между касательными к геодезическим в точке из пересечения.

Определим, как часто пересекаются две геодезические линии (в виде винтовых) с разными углами наклона. Будем считать (в силу симметрии это не уменьшает общности), что они выходят из одной точки  $(1; 0; 0)$ :

$$x^{(1)} = (\cos \varphi ; \sin \varphi ; \varphi \operatorname{tg} \alpha_1), x^{(2)} = (\cos \varphi ; \sin \varphi ; \varphi \operatorname{tg} \alpha_2), \varphi \in \mathbb{R}.$$

Пусть для определенности  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Если две геодезические пересекаются,

$$\text{то } x^{(1)}(\varphi_1) = x^{(2)}(\varphi_2), \text{ т.е.}$$

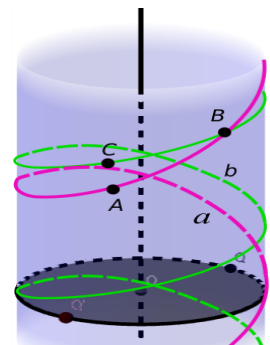


Рис. 19

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = \varphi_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k \\ \varphi_1 = 2\pi k \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

При  $k = 1$  получаем точку первого пересечения, соответствующую

$$\varphi_1 = 2\pi \operatorname{tg} \alpha_2 / (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2), \varphi_2 = 2\pi \operatorname{tg} \alpha_1 / (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

и отстоящую от общей начальной точки двух геодезических по оси  $z$  на величину  $\Delta z = 2\pi \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 / (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$ . Итак, частота пересечения двух геодезических зависит от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Три цилиндрические прямые, пересекаясь попарно в трёх точках, образуют на сфере два цилиндрических треугольника (рис. 20). Известные на плоскости случаи равенства треугольников сохраняются. Это легко показать, применив развертку бесконечного цилиндра.

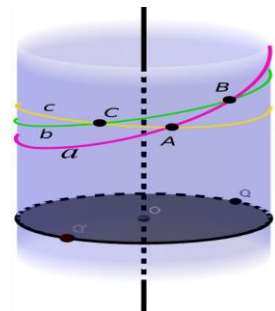


Рис. 20

Сумма углов всякого цилиндрического треугольника равна  $180^\circ$ . Для треугольников справедливы аналоги теорем Чевы и Менелая. Сформулируем теорему Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник  $ABC$ , причем  $C_1$  - это точка ее

пересечения со стороной  $AB$ ,  $A_1$  - точка ее пересечения со стороной  $BC$  и  $B_1$  - точка ее пересечения с продолжением стороны  $AC$  (рис. 21). Тогда имеет место соотношение:  $\frac{AC_1}{C_1B}$ .

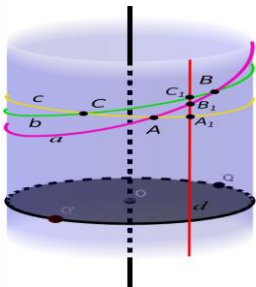


Рис. 21

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Так как цилиндр локально изометричен плоской полосе, то доказательство теоремы Менелая для цилиндрической поверхности сводится к ее доказательству для плоскости (рис. 22).

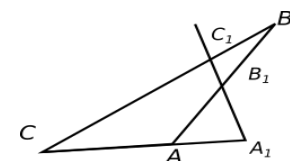


Рис. 22

Геодезические линии на торе определяются решением вариационной задачи, приводящей к уравнению

$$(\theta')^2 = \left( \frac{R}{r} + \cos \theta \right) \sqrt{C_1^2 (R/r + \cos \theta)^2 - 1},$$

откуда уравнение геодезических линий получаем в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dt}{\left(\frac{R}{r} + \cos \theta\right) \sqrt{k^2 \left(\frac{R}{r} + \cos \theta\right)^2 - 1}}.$$

Их исследование и анализ свойств геометрии тора, отличных от сферической и цилиндрической геометрий, предполагается продолжить.

Выделим некоторые закономерности, предположительно связанные с фундаментальной группой рассматриваемой поверхности. В  $\mathbb{R}^2$  и  $S^2$  две прямые, пересекаясь, разделяют пространство на четыре части. На  $C^2$  прямые пересекаются счетное число раз. При пересечении образующих с винтовыми линиями и двух винтовых линий получаем счетное число областей, при пересечении цилиндрических прямых, перпендикулярных образующим, с винтовыми линиями и с образующими – две области.

### Список литературы

1. Атанасян Л.С. Курс элементарной геометрии, часть 2. Стереометрия / Л.С. Атанасян, Н.С. Денисова, Е.В. Силаев - М.: Сантакс-Пресс, 1997. – 287 с.
2. Васильев Н. Сумма углов сферического многоугольника // Н. Васильев, В. Гутенмахер. «Квант», 1988, №2. – С. 52-56.
3. Виро О.Я. Элементарная топология / Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаева Н.Ю., Харламов В.М. – М.: ЛОГОС, 2004. – 380 с.
4. История математики от древнейших времён до начала XIX столетия. Том первый. История математики с древнейших времен до начала нового времени / И.Г. Башмакова, Э.И. Березкина, А.И. Володарский, Б.А. Розенфельд, А.П. Юшкевич, Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. – 351 с.
5. Федосова М. Сферическая геометрия. Энциклопедия Кругосвет [Электронный ресурс] // М. Федосова. – Режим доступа: <http://www.krugosvet.ru/node/41971>.
6. Яу Ш. Теория струн и скрытые измерения Вселенной / Ш. Яу, С. Надис – СПб.: Питер, 2013. – 400 с.