УДК 517, 51-7
ББК 22.161

Обобщенные функции как модели механических процессов

Коннов Евгений Юрьевич,
аспирант второго года обучения Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова
Научный руководитель:
Штраус Владимир Абрамович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова

Аннотация. В работе рассмотрена задача о собственных колебаниях балки с сосредоточенной нагрузкой, которая решается методом разделения переменных с использованием техники обобщённых функций.

Ключевые слова: граничная задача, дельта-функция, вариация произвольных постоянных.

Теория обобщенных функций – одно из крупнейших достижений математики XX века. Обобщенные функции дают возможность в математически корректной форме выражать такие понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, пространственную плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенно действующего источника, интенсивность силы, приложенной к точке и т. д. (см., напр., [4]).

В данной статье рассматривается задача о колебаниях однородной балки, на которую действуют две сосредоточенные нагрузки. Применяется модификация классического метода разделения переменных, в которой используются обобщённые функции. Подход к рассматриваемой задаче является новым, имеет практические приложения. Используемый подход может быть перенесён на иные задачи математической физики, в которых требуется учитывать точечные воздействия.

Постановка задачи

Рассмотрим тонкую балку, концы которой свободно опираются на две опоры. Это означает, что концы балки не перемещаются, но наклоны балки в концевых точках могут изменяться (концы балки закреплены с помощью штифтовых устройств). Пусть материал балки имеет линейную плотность $\rho = \rho(x)$, при этом мы учитываем возможность существования у функции ρ разрывов, определяемых точечными грузами, сосредоточенными в некоторых её точках. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда однородность материала балки нарушается только за счёт наличия таких точечных грузов, то есть масса участка балки от левого конца до переменной точки, движущейся к правому концу, меняется по ступенчатому закону. Если принять длину балки за единицу и направить ось Ox вдоль балки, то в указанных предположениях можно будет записать

$$m(x) = \rho_0 \cdot x + \sum_{x_k < x} m_k,$$

где ρ_0 – плотность основного материала балки, x_k - координаты точек, в которых расположены сосредоточенные дополнительные нагрузки, m_k – соответствующие массы, $k = 1, \dots, n$, $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$. Иначе говоря,

$$m(x) = \rho_0 \cdot x + \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \theta(x - x_k),$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. В классическом случае непрерывности $m(x)$ имеем

$$m(x) = \int_0^x \rho(t)dt \Rightarrow \rho(x) = \frac{dm}{dx},$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность балки в точке с координатой x. Используя аппарат обобщённых функций, для линейной плотности балки с учётом точечных нагрузок можно записать:

$$\rho(x) = \frac{d}{dx}\, m(x) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \delta(x - x_k),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, которую мы понимаем как функционал на пространстве основных функций (бесконечно дифференцируемых с компактным носителем), сопоставляющий любой основной функции её значение в точке 0, см. [1-4].

Будем решать задачу о малых колебаниях балки. Можно показать, что в сделанных предположениях сохраняется известное для классического случая (отсутствия сосредоточенных нагрузок) дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее малые колебания стержня. В классическом случае его принято записывать в виде [6]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} = 0,\ \ \alpha^2 = \frac{K}{\rho(x)}, \tag{1}$$

где K – изгибная жесткость балки (постоянная величина). В нашем случае уравнение, аналогичное (1), можно записать в виде

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1'}$$

При этом для нахождения закона колебаний $u = u(x,t)$ нужна следующая дополнительная информация:

1) начальные условия, определяющие форму балки и распределение скоростей её точек в момент времени $t = 0$:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u'_t(x,0) = g(x); \end{cases} \tag{2}$$

2) граничные условия (длину балки примем за 1):

$$u(0;t) = u(1;t) = 0, \tag{3.1}$$

так как концы балки неподвижны;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0;t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1;t) = 0, \tag{3.2}$$

так как изгибающий момент в свободно опирающемся конце должен быть равен нулю.

Решение задачи методом разделения переменных

Для решения поставленной задачи воспользуемся одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными - методом разделения переменных. Итак, будем искать решение уравнения ($1'$) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3.1, 3.2) в виде комбинации элементарных решений уравнения ($1'$) вида

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{4}$$

удовлетворяющих также граничным условиям (3.1, 3.2). Нас не интересуют тривиальные решения, равные нулю. Подставляя (4) в уравнение ($1'$), получим:

$$\frac{\rho(x)}{K}\frac{\partial^2 X(x)T(t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 X(x)T(t)}{\partial x^4}=0,$$

$$\frac{\rho(x)}{K}X(x)T''(t)+T(t)X^{IV}(x)=0.$$

Разделим обе части уравнения на выражение (4), тогда получим:

$$\frac{\rho(x)}{K}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}+\frac{X^{IV}(x)}{X(x)}=0,$$

$$\frac{\rho(x)}{K}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}=-\frac{X^{IV}(x)}{X(x)},$$

$$\frac{-\rho(x)X(x)}{KX^{IV}(x)}=\frac{T(t)}{T''(t)}\,. \tag{5}$$

Чтобы функция (4) была решением уравнения ($1'$), равенство (5) должно удовлетворяться тождественно, то есть для всех значений независимых переменных $0<x<1$, $t>0$. Правая часть равенства (5) является функцией только переменной t, а левая – только x. Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части (5) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение, то есть

$$\frac{-\rho(x)X(x)}{KX^{IV}(x)}=\frac{T(t)}{T''(t)}=const=\beta^{-1},$$

откуда получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$\begin{cases} KX^{IV}(x)+\beta\rho(x)X(x)=0, \\ T''(t)-\beta T(t)=0, \end{cases} \qquad X(x)\not\equiv 0, \qquad T(t)\not\equiv 0 \tag{6}$$

Подставляем (4) в граничные условия (3.1), (3.2):

$$X(0)T(t)=X(1)T(t)=0,$$
$$X''(0)T(t)=X''(1)T(t)=0,$$

и после деления на $T(t)\not\equiv 0$ получаем

$$X(0)=X(1)=0, \qquad X''(0)=X''(1)=0. \tag{7}$$

Займемся сначала решением первого уравнения в (6), поскольку для $X(x)$ у нас есть граничные условия (7). Уравнение для X - это однородное уравнение четвёртого порядка. Его решение сильно зависит от того, положительной, отрицательной или нулевой будет константа β.

Подставляя в (6.1) $\rho(x)=\rho_0+m_1\delta(x-x_1)+m_2\delta(x-x_2)$, получаем

$$KX^{IV}(x)+\beta X(x)\,(\rho_0+m_1\delta(x-x_1)+m_2\delta(x-x_2)=0,$$
$$KX^{IV}(x)+\beta\rho_0X(x)+\beta m_1\delta(x-x_1)X(x)+\beta m_2\delta(x-x_2)X(x)=0.$$

Подействовав дельта-функцией на $X(x)$, получим:

$$KX^{IV}(x)+\beta\rho_0X(x)+\beta m_1X(x_1)\delta(x-x_1)+\beta m_2X(x_2)\delta(x-x_2)=0.$$

Получили граничную задачу типа задачи Штурма-Лиувилля (с обобщённой функцией в качестве коэффициента):

$$\begin{cases} KX^{IV}(x)+\beta\rho_0X(x)=-\beta X(x_1)m_1\delta(x-x_1)-\beta X(x_2)m_2\delta(x-x_2), \\ X(0)=X(1)=0, \qquad X''(0)=X''(1)=0 \end{cases}$$

Решаем неоднородное уравнение, считая $X(x_1)$ и $X(x_2)$ константами. Для этого сначала находим решение однородного уравнения

$$KX^{IV}(x)+\beta\rho_0X(x)=0.$$

1) Для $\beta=0$: $X^{IV}(x)=0$, общее решение $X(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$.
2) Для $\beta=-\omega^2<0$: $X^{IV}(x)-\frac{\omega^2\rho_0}{K}X(x)=0$;

   характеристическое уравнение $k^4-\frac{\omega^2}{K}\rho_0=0$,

   $k_{1,2}=\pm\sqrt{\omega}\left(\frac{\rho_0}{K}\right)^{1/4}=\pm\lambda$, $k_{3,4}=\pm i\sqrt{\omega}\left(\frac{\rho_0}{K}\right)^{1/4}=\pm i\lambda$, где $\lambda=\sqrt{\omega}\left(\frac{\rho_0}{K}\right)^{1/4}$;

   общее решение однородного уравнения

$$X(x) = C_1\mathrm{ch}(\lambda x) + \ C_2\mathrm{sh}(\lambda x) + C_3\cos(\lambda x) + C_4\sin(\lambda x).$$

3) Для $\beta = \omega^2 > 0$: $\quad X^{IV}(x) + \frac{\omega^2\rho_0}{K}X(x) = 0;$

характеристическое уравнение $k^4 + \frac{\omega^2}{K}\rho_0 = 0,\ k = \left(-\omega^2\frac{\rho_0}{K}\right)^{1/4}$,

$$k_1 = \left(\omega^2\frac{\rho_0}{4K}\right)^{1/4}(1+i) = \frac{\lambda(1+i)}{\sqrt{2}},\ \ k_2 = \left(\omega^2\frac{\rho_0}{4K}\right)^{1/4}(-1+i) = \frac{\lambda(-1+i)}{\sqrt{2}},$$

$$k_3 = \left(\omega^2\frac{\rho_0}{4K}\right)^{1/4}(-1-i) = \frac{\lambda(-1-i)}{\sqrt{2}},\ \ k_4 = \left(\omega^2\frac{\rho_0}{4K}\right)^{1/4}(1-i) = \frac{\lambda(1-i)}{\sqrt{2}},$$

общее решение однородного уравнения $X(x) = C_1\exp\left(\frac{\lambda(1+i)}{\sqrt{2}}x\right) + C_2\exp\left(\frac{\lambda(-1+i)}{\sqrt{2}}x\right) + C_3\exp\left(\frac{\lambda(-1-i)}{\sqrt{2}}x\right) + C_4\exp\left(\frac{\lambda(1+i)}{\sqrt{2}}x\right).$

Общее решение неоднородного уравнения с обобщёнными функциями в правой части получим, варьируя постоянные $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $C_3 = C_3(x)$, $C_4 = C_4(x)$. В данной статье мы рассмотрим только случаи $\beta = 0$, $\beta = -\omega^2 < 0$.

Если $\beta = 0$, то правая часть уравнения (6.1) обращается в нуль, и граничные условия (7) дают:

$X(0) = C_1 = 0;\ X(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0;$

$X''(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)'' = 2C_3 + 6C_4x$

$X''(0) = 2C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0; X''(1) = 2C_3 + 6C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$

$X(x) \equiv 0$ – это тривиальное решение, оно нас не интересует.

Если $\beta = -\omega^2 < 0$, то

$$X(x) = C_1(x)\mathrm{ch}(\lambda x) + \ C_2(x)\mathrm{sh}(\lambda x) + C_3(x)\cos(\lambda x) + C_4(x)\sin(\lambda x), \quad (8)$$

и для определения множителей получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'\ \cdot \mathrm{ch}(\lambda x) + C_2' \cdot \mathrm{sh}(\lambda x) + C_3' \cdot \cos(\lambda x) + C_4' \cdot \sin(\lambda x) = 0, \\ C_1'\lambda \cdot \mathrm{sh}(\lambda x) + C_2'\lambda \cdot \mathrm{ch}(\lambda x) - C_3'\lambda \cdot \sin(\lambda x) + C_4'\lambda \cdot \cos(\lambda x) = 0, \\ C_1'\lambda^2 \cdot \mathrm{ch}(\lambda x) + C_2'\lambda^2 \cdot \mathrm{sh}(\lambda x) - C_3'\lambda^2 \cdot \cos(\lambda x) - C_1'\lambda^2 \cdot \sin(\lambda x) = 0, \\ C_1'\lambda^3 \cdot \mathrm{sh}(\lambda x) + C_2'\lambda^3 \cdot \mathrm{ch}(\lambda x) + C_3'\lambda^3 \cdot \sin(\lambda x) - C_2'\lambda^3 \cdot \cos(\lambda x) = G(x), \end{cases}$$

где $G(x) = \frac{\omega^2}{K}X(x_1)m_1\delta(x - x_1) + \frac{\omega^2}{K}X(x_2)m_2\delta(x - x_2)$. Выразим ω^2 через λ:

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2\rho_0}{K} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\lambda^4K}{\rho_0} \Rightarrow \frac{\omega^2}{K} = \frac{\lambda^4K}{\rho_0K} = \frac{\lambda^4}{\rho_0} \quad (\rho_0 \neq 0).$$

Приводя расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{ch}(\lambda x) & \mathrm{sh}(\lambda x) & \cos(\lambda x) & \sin(\lambda x) & 0 \\ \mathrm{sh}(\lambda x) & \mathrm{ch}(\lambda x) & -\sin(\lambda x) & \cos(\lambda x) & 0 \\ \mathrm{ch}(\lambda x) & \mathrm{sh}(\lambda x) & -\cos(\lambda x) & -\sin(\lambda x) & 0 \\ \mathrm{sh}(\lambda x) & \mathrm{ch}(\lambda x) & \sin(\lambda x) & -\cos(\lambda x) & G(x)/\lambda^3 \end{array}\right)$$

элементарными преобразованиями сначала к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2\mathrm{ch}(\lambda x) & 2\mathrm{sh}(\lambda x) & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{sh}(\lambda x) & 2\mathrm{ch}(\lambda x) & 0 & 0 & G(x)/\lambda^3 \\ 0 & 0 & 2\cos(\lambda x) & 2\sin(\lambda x) & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin(\lambda x) & -2\cos(\lambda x) & G(x)/\lambda^3 \end{array}\right),$$

а затем к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{sh}(\lambda x)G(x)/2\lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{ch}(\lambda x)G(x)/2\lambda^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin(\lambda x)G(x)/2\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos(\lambda x)G(x)/2\lambda^3 \end{array}\right),$$

получаем:

$$C_1' = -\frac{G(x)\mathrm{sh}(\lambda x)}{2\lambda^3}, C_2' = \frac{G(x)\mathrm{ch}(\lambda x)}{2\lambda^3}, C_3' = \frac{G(x)\sin(\lambda x)}{2\lambda^3}, C_4' = -\frac{G(x)\cos(\lambda x)}{2\lambda^3},$$

причём $\frac{G(x)}{2\lambda^3} = \frac{\lambda}{2\rho_0} X(x_1) m_1 \delta(x - x_1) + \frac{\lambda}{2\rho_0} X(x_2) m_2 \delta(x - x_2)$,

откуда

$$C_1(x) = -\frac{\lambda}{2\rho_0}\left(m_1 X(x_1) \int \mathrm{sh}(\lambda x)\delta(x - x_1)dx + m_2 X(x_2) \int \mathrm{sh}(\lambda x)\delta(x - x_2)dx\right) =$$

$$-\frac{\lambda}{2\rho_0}\left(m_1 X(x_1)\mathrm{sh}(\lambda x_1) \int \delta(x - x_1)dx + m_2 X(x_2)\mathrm{sh}(\lambda x_2) \int \delta(x - x_2)dx\right) =$$

$$= -\frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1)\mathrm{sh}(\lambda x_1)\theta(x - x_1) - \frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2)\mathrm{sh}(\lambda x_2)\theta(x - x_2) + C_1.$$

Аналогично,

$$C_2(x) = \frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1)\mathrm{ch}(\lambda x_1)\theta(x - x_1) + \frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2)\mathrm{ch}(\lambda x_2)\theta(x - x_2) + C_2,$$

$$C_3(x) = \frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1)\sin(\lambda x_1)\theta(x - x_1) + \frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2)\sin(\lambda x_2)\theta(x - x_2) + C_3,$$

$$C_4(x) = -\frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1)\cos(\lambda x_1)\theta(x - x_1) - \frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2)\cos(\lambda x_2)\theta(x - x_2) + C_4,$$

так что окончательно

$X(x) =$

$$= \frac{\lambda}{2\rho_0}\big(-m_1X(x_1)\mathrm{sh}(\lambda x_1)\theta(x-x_1)\mathrm{ch}(\lambda x) + m_1X(x_1)\mathrm{ch}(\lambda x_1)\theta(x-x_1)\mathrm{sh}(\lambda x) -$$
$$m_2X(x_2)\mathrm{sh}(\lambda x_2)\theta(x-x_2)\mathrm{ch}(\lambda x) + m_2X(x_2)\mathrm{ch}(\lambda x_2)\theta(x-x_2)\mathrm{sh}(\lambda x) +$$
$$m_1X(x_1)\sin(\lambda x_1)\theta(x-x_1)\cos(\lambda x) - m_1X(x_1)\cos(\lambda x_1)\theta(x-x_1)\sin(\lambda x) +$$
$$m_2X(x_2)\sin(\lambda x_2)\theta(x-x_2)\cos(\lambda x) - m_2X(x_2)\cos(\lambda x_2)\theta(x-x_2)\sin(\lambda x)\big) +$$
$$C_1\mathrm{ch}(\lambda x) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x) + C_3\cos(\lambda x) + C_4\sin(\lambda x) =$$
$$= \frac{\lambda}{2\rho_0}m_1X(x_1)\theta(x-x_1)\Big(\sin\big(\lambda(x_1-x)\big) - \mathrm{sh}\big(\lambda(x_1-x)\big)\Big) +$$
$$+\frac{\lambda}{2\rho_0}m_2X(x_2)\theta(x-x_2)\Big(\sin\big(\lambda(x_2-x)\big) - \mathrm{sh}\big(\lambda(x_2-x)\big)\Big) +$$
$$+ C_1\mathrm{ch}(\lambda x) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x) + C_3\cos(\lambda x) + C_4\sin(\lambda x).$$

Введем обозначение: $P(s) = \mathrm{sh}\, s - \sin s$, тогда $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$;

$$X(x) = \frac{\lambda}{2\rho_0}m_1X(x_1)\theta(x-x_1)P\big(\lambda(x-x_1)\big) + \frac{\lambda}{2\rho_0}m_2X(x_2)\theta(x-x_2)P\big(\lambda(x-x_2)\big) +$$
$$+ C_1\mathrm{ch}(\lambda x) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x) + C_3\cos(\lambda x) + C_4\sin(\lambda x) \qquad (9)$$

В частности,

$$X(x_1) = \frac{\lambda}{2\rho}m_1X(x_1)\theta(x_1-x_1)P\big(\lambda(x_1-x_1)\big) +$$
$$+\frac{\lambda}{2\rho}m_2X(x_2)\theta(x_1-x_2)P\big(\lambda(x_1-x_2)\big) +$$
$$+C_1\mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3\cos(\lambda x_1) + C_4\sin(\lambda x_1) =$$
$$= C_1\mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3\cos(\lambda x_1) + C_4\sin(\lambda x_1);$$

$$X(x_2) = \frac{\lambda}{2\rho_0}m_1X(x_1)\theta(x_2-x_1)P\big(\lambda(x_2-x_1)\big) +$$
$$\frac{\lambda}{2\rho_0}m_2X(x_2)\theta(x_2-x_2)P\big(\lambda(x_2-x_2)\big) +$$
$$+C_1\mathrm{ch}(\lambda x_2) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x_2) + C_3\cos(\lambda x_2) + C_4\sin(\lambda x_2) =$$
$$= \frac{\lambda}{2\rho_0}m_1X(x_1)P\big(\lambda(x_2-x_1)\big) + C_1\mathrm{ch}(\lambda x_2) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x_2) + C_3\cos(\lambda x_2) + C_4\sin(\lambda x_2) =$$
$$= \frac{\lambda}{2\rho_0}m_1\big(C_1\mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3\cos(\lambda x_1) + C_4\sin(\lambda x_1)\big)P\big(\lambda(x_2-x_1)\big) +$$
$$+ C_1\mathrm{ch}(\lambda x_2) + C_2\mathrm{sh}(\lambda x_2) + C_3\cos(\lambda x_2) + C_4\sin(\lambda x_2)$$

Подставляя полученные выражения в (9) и используя граничные условия, получаем

$$X(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 + C_3 = 0; \tag{10.1}$$

$$X(1) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1) P\big(\lambda(1 - x_1)\big) + \frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2) P\big(\lambda(1 - x_2)\big) +$$
$$+ C_1 \mathrm{ch}\lambda + C_2 \mathrm{sh}\lambda + C_3 \cos\lambda + C_4 \sin\lambda = 0;$$

$$\frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 \big(C_1 \mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2 \mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3 \cos(\lambda x_1) + C_4 \sin(\lambda x_1)\big) P\big(\lambda(1 - x_1)\big)$$
$$+ \frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 \left(\frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 \big(C_1 \mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2 \mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3 \cos(\lambda x_1) + C_4 \sin(\lambda x_1)\big) P\big(\lambda(x_2 - x_1)\big) + C_1 \mathrm{ch}(\lambda x_2) + C_2 \mathrm{sh}(\lambda x_2) + C_3 \cos(\lambda x_2) + C_4 \sin(\lambda x_2)\right) P\big(\lambda(1 - x_2)\big) +$$
$$C_1 \mathrm{ch}\lambda + C_2 \mathrm{sh}\lambda + C_3 \cos\lambda + C_4 \sin\lambda = 0. \tag{10.2}$$

Чтобы использовать оставшиеся граничные условия, сначала найдем первую производную:

$$X'(x) = \frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1) \Big(\delta(x - x_1) P\big(\lambda(x - x_1)\big) + \theta(x - x_1) \cdot \lambda P'\big(\lambda(x - x_1)\big)\Big) +$$
$$\frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2) \Big(\delta(x - x_2) P\big(\lambda(x - x_2)\big) + \theta(x - x_2) \cdot \lambda P'\big(\lambda(x - x_2)\big)\Big) +$$
$$+\lambda C_1 \mathrm{sh}(\lambda x) + \lambda C_2 \mathrm{ch}(\lambda x) - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x) =$$
$$= \frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 X(x_1) \Big(P\big(\lambda(x_1 - x_1)\big)\delta(x - x_1) + \theta(x - x_1) \cdot \lambda P'\big(\lambda(x - x_1)\big)\Big) +$$
$$\frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 X(x_2) \Big(P\big(\lambda(x_2 - x_2)\big)\delta(x - x_2) + \theta(x - x_2) \cdot \lambda P'\big(\lambda(x - x_2)\big)\Big) +$$
$$+\lambda C_1 \mathrm{sh}(\lambda x) + \lambda C_2 \mathrm{ch}(\lambda x) - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x) =$$
$$= \frac{\lambda^2}{2\rho_0} m_1 X(x_1) \theta(x - x_1) P'\big(\lambda(x - x_1)\big) + \frac{\lambda^2}{2\rho_0} m_2 X(x_2) \theta(x - x_2) P'\big(\lambda(x - x_2)\big) +$$
$$+ \lambda C_1 \mathrm{sh}(\lambda x) + \lambda C_2 \mathrm{ch}(\lambda x) - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x).$$

Найдем вторую производную

$$X''(x) = \frac{\lambda^2}{2\rho_0} m_1 X(x_1) \Big(\delta(x - x_1) P'\big(\lambda(x - x_1)\big) + \theta(x - x_1) \cdot \lambda P''\big(\lambda(x - x_1)\big)\Big) +$$
$$\frac{\lambda^2}{2\rho_0} m_2 X(x_2) \Big(\delta(x - x_2) P'\big(\lambda(x - x_2)\big) + \theta(x - x_2) \cdot \lambda P''\big(\lambda(x - x_2)\big)\Big) +$$
$$+ \lambda^2 C_1 \mathrm{ch}(\lambda x) + \lambda^2 C_2 \mathrm{sh}(\lambda x) - \lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\rho_0} m_1 X(x_1) \left(P'\big(\lambda(x_1 - x_1)\big)\delta(x - x_1) + \theta(x - x_1) \cdot \lambda P''\big(\lambda(x - x_1)\big) \right) +$$
$$\frac{\lambda^2}{2\rho_0} m_2 X(x_2) \left(P'\big(\lambda(x_2 - x_2)\big)\delta(x - x_2) + \theta(x - x_2) \cdot \lambda P''\big(\lambda(x - x_2)\big) \right) +$$
$$+ \lambda^2 C_1 \mathrm{ch}(\lambda x) + \lambda^2 C_2 \mathrm{sh}(\lambda x) - \lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x) =$$
$$= \frac{\lambda^3}{2\rho_0} m_1 X(x_1)\theta(x - x_1) P''\big(\lambda(x - x_1)\big) + \frac{\lambda^3}{2\rho_0} m_2 X(x_2)\theta(x - x_2) P''\big(\lambda(x - x_2)\big) +$$
$$+ \lambda^2 C_1 \mathrm{ch}(\lambda x) + \lambda^2 C_2 \mathrm{sh}(\lambda x) - \lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x).$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(0) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 C_1 - \lambda^2 C_3 = 0 \Rightarrow C_1 - C_3 = 0; \qquad (10.3)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(1) = 0 \;\;\Rightarrow \frac{\lambda^3}{2\rho_0} m_1 X(x_1) P''\big(\lambda(1 - x_1)\big) + \frac{\lambda^3}{2\rho} m_2 X(x_2) P''\big(\lambda(1 - x_2)\big) +$$
$$\lambda^2 (C_1 \mathrm{ch}\lambda + C_2 \mathrm{sh}\lambda - C_3 \cos\lambda - C_4 \sin\lambda) = 0;$$

подставляя выражения для $X(x_1)$ и $X(x_2)$ в последнее равенство и сокращая на λ^2, получаем

$$\frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 \big(C_1 \mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2 \mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3 \cos(\lambda x_1) + C_4 \sin(\lambda x_1)\big) P''\big(\lambda(1 - x_1)\big) +$$
$$\frac{\lambda}{2\rho_0} m_2 \left(\frac{\lambda}{2\rho_0} m_1 \big(C_1 \mathrm{ch}(\lambda x_1) + C_2 \mathrm{sh}(\lambda x_1) + C_3 \cos(\lambda x_1) + C_4 \sin(\lambda x_1)\big) P\big(\lambda(x_2 -\right.$$
$$\left. x_1)\big) + C_1 \mathrm{ch}(\lambda x_2) + C_2 \mathrm{sh}(\lambda x_2) + C_3 \cos(\lambda x_2) + C_4 \sin(\lambda x_2) \right) P''\big(\lambda(1 - x_2)\big)$$
$$+ C_1 \mathrm{ch}\lambda + C_2 \mathrm{sh}\lambda - C_3 \cos\lambda - C_4 \sin\lambda = 0. \qquad (10.4)$$

Равенства (10.1) и (10.3) дают $C_1 = C_3 = 0$, с учётом этого (10.2) и (10.4) принимают соответственно вид

$$C_2 \left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2} P\big(\lambda(x_2 - x_1)\big) P\big(\lambda(1 - x_2)\big) \mathrm{sh}(\lambda x_1) + \frac{\lambda m_1}{2\rho_0} P\big(\lambda(1 - x_1)\big) \mathrm{sh}(\lambda x_1) +\right.$$
$$\left. \frac{\lambda m_2}{2\rho_0} P\big(\lambda(1 - x_2)\big) \mathrm{sh}(\lambda x_2) + \mathrm{sh}\lambda \right) + C_4 \left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2} P\big(\lambda(x_2 - x_1)\big) P\big(\lambda(1 -\right.$$
$$\left. x_2)\big) \sin(\lambda x_1) + \frac{\lambda m_1}{2\rho_0} P\big(\lambda(1 - x_1)\big) \sin(\lambda x_1) + \frac{\lambda m_2}{2\rho_0} P\big(\lambda(1 - x_2)\big) \sin(\lambda x_2) + \sin\lambda \right) = 0;$$

$$C_2 \left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2} P\big(\lambda(x_2 - x_1)\big) P''\big(\lambda(1 - x_2)\big) \mathrm{sh}(\lambda x_1) + \frac{\lambda m_1}{2\rho_0} P''\big(\lambda(1 - x_1)\big) \mathrm{sh}(\lambda x_1) +\right.$$
$$\left. \frac{\lambda m_2}{2\rho_0} P''\big(\lambda(1 - x_2)\big) \mathrm{sh}(\lambda x_2) + \mathrm{sh}\lambda \right) + C_4 \left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2} P\big(\lambda(x_2 - x_1)\big) P''\big(\lambda(1 -\right.$$
$$\left. x_2)\big) \sin(\lambda x_1) + \frac{\lambda m_1}{2\rho_0} P''\big(\lambda(1 - x_1)\big) \sin(\lambda x_1) + \frac{\lambda m_2}{2\rho_0} P''\big(\lambda(1 - x_2)\big) \sin(\lambda x_2) - \sin\lambda \right) = 0.$$

Система двух последних уравнений относительно C_2, C_4 должна иметь нетривиальные решения, откуда получаем:

$$\left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2} P\big(\lambda(x_2-x_1)\big)P\big(\lambda(1-x_2)\big)\mathrm{sh}(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_1}{2\rho_0}P\big(\lambda(1-x_1)\big)\mathrm{sh}(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_2}{2\rho_0}P\big(\lambda(1-x_2)\big)\mathrm{sh}(\lambda x_2)+\mathrm{sh}\lambda\right)\cdot\left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2}P\big(\lambda(x_2-x_1)\big)P''\big(\lambda(1-x_2)\big)\sin(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_1}{2\rho_0}P''\big(\lambda(1-x_1)\big)\sin(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_2}{2\rho_0}P''\big(\lambda(1-x_2)\big)\sin(\lambda x_2)-\sin\lambda\right)-$$

$$-\left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2}P\big(\lambda(x_2-x_1)\big)P''\big(\lambda(1-x_2)\big)\mathrm{sh}(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_1}{2\rho_0}P''\big(\lambda(1-x_1)\big)\mathrm{sh}(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_2}{2\rho_0}P''\big(\lambda(1-x_2)\big)\mathrm{sh}(\lambda x_2)+\mathrm{sh}\lambda\right)\cdot\left(\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2}P\big(\lambda(x_2-x_1)\big)P\big(\lambda(1-x_2)\big)\sin(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_1}{2\rho_0}P\big(\lambda(1-x_1)\big)\sin(\lambda x_1)+\frac{\lambda m_2}{2\rho_0}P\big(\lambda(1-x_2)\big)\sin(\lambda x_2)+\sin\lambda\right)=0,\cdot$$

или, после упрощения,

$$\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2}\mathrm{sh}\lambda\cdot\sin(\lambda x_1)\cdot P\big(\lambda(x_2-x_1)\big)\Big(P''\big(\lambda(1-x_2)\big)-P\big(\lambda(1-x_2)\big)\Big)-$$

$$-\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2}\mathrm{sh}(\lambda x_1)\cdot\sin\lambda\cdot P\big(\lambda(x_2-x_1)\big)\Big(P''\big(\lambda(1-x_2)\big)+P\big(\lambda(1-x_2)\big)\Big)+$$

$$+\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{4{\rho_0}^2}\big(\mathrm{sh}(\lambda x_1)\cdot\sin(\lambda x_2)-\mathrm{sh}(\lambda x_2)\cdot\sin(\lambda x_1)\big)\Big(P\big(\lambda(1-x_1)\big)P''\big(\lambda(1-x_2)\big)-P''\big(\lambda(1-x_1)\big)P\big(\lambda(1-x_2)\big)\Big)-$$

$$-\frac{\lambda m_1}{2\rho_0}\mathrm{sh}(\lambda x_1)\cdot\sin\lambda\Big(P''\big(\lambda(1-x_1)\big)+P\big(\lambda(1-x_1)\big)\Big)-$$

$$-\frac{\lambda m_2}{2\rho_0}\mathrm{sh}(\lambda x_2)\cdot\sin\lambda\Big(P''\big(\lambda(1-x_2)\big)+P\big(\lambda(1-x_2)\big)\Big)+$$

$$+\frac{\lambda m_1}{2\rho_0}\mathrm{sh}\lambda\cdot\sin(\lambda x_1)\Big(P''\big(\lambda(1-x_1)\big)-P\big(\lambda(1-x_1)\big)\Big)+$$

$$+\frac{\lambda m_2}{2\rho_0}\mathrm{sh}\lambda\cdot\sin(\lambda x_2)\Big(P''\big(\lambda(1-x_2)\big)-P\big(\lambda(1-x_2)\big)\Big)-2\mathrm{sh}\lambda\cdot\sin\lambda=0.$$

Учитывая, что $P(s)=\mathrm{sh}\,s-\sin s\,, P''(s)=sh\,s+sin\,s$,

$$P''(s)+P(s)=2\,\mathrm{sh}\,s\,, P''(s)-P(s)=2\sin s,$$

$$P(s_1)\cdot P''(s_2)-P(s_2)\cdot P''(s_1)=(\mathrm{sh}\,s_1-\sin s_1)(\mathrm{sh}\,s_2+\sin s_2)-$$

$$-(\operatorname{sh} s_2 - \sin s_2)(\operatorname{sh} s_1 + \sin s_1) = 2(\operatorname{sh} s_1 \sin s_2 - \sin s_1 \operatorname{sh} s_2),$$

приводим уравнение к виду

$$\frac{\lambda^2 m_1 m_2}{2{\rho_0}^2}\Big(\big(\operatorname{sh}\big(\lambda(x_2-x_1)\big) - \sin\big(\lambda(x_2-x_1)\big)\big)\big(\operatorname{sh}\lambda\cdot\sin(\lambda x_1)\cdot\sin\big(\lambda(1-x_2)\big) -$$
$$-\sin\lambda\cdot\operatorname{sh}(\lambda x_1)\cdot\operatorname{sh}\big(\lambda(1-x_2)\big)\big) + +\big(\operatorname{sh}(\lambda x_1)\cdot\sin(\lambda x_2) - \operatorname{sh}(\lambda x_2)\cdot$$
$$\sin(\lambda x_1)\big)\Big(\operatorname{sh}\big(\lambda(1-x_1)\big)\sin\big(\lambda(1-x_2)\big) - \sin\big(\lambda(1-x_1)\big)\operatorname{sh}\big(\lambda(1-x_2)\big)\Big)\Big) -$$
$$-\frac{\lambda m_1}{\rho_0}\sin\lambda\cdot\operatorname{sh}(\lambda x_1)\cdot\operatorname{sh}\big(\lambda(1-x_1)\big) - \frac{\lambda m_2}{\rho_0}\sin\lambda\cdot\operatorname{sh}(\lambda x_2)\cdot\operatorname{sh}\big(\lambda(1-x_2)\big) +$$
$$+\frac{\lambda m_1}{\rho_0}\operatorname{sh}\lambda\cdot\sin(\lambda x_1)\cdot\sin\big(\lambda(1-x_1)\big) + \frac{\lambda m_2}{\rho_0}\operatorname{sh}\lambda\cdot\sin(\lambda x_2)\cdot\sin\big(\lambda(1-x_2)\big) -$$
$$-2\operatorname{sh}\lambda\cdot\sin\lambda = 0. \qquad (11)$$

Для фиксированного корня λ уравнения (11) соответствующая $X(x)$ из (9) функция $T(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{T(t)}{T''(t)} = -\omega^{-2}, \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \qquad T = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t),$$

где $\omega = \sqrt{\frac{\lambda^4 K}{\rho_0}}$ Таким образом, мы получаем частное решение исходного уравнения в частных производных вместе с заданными граничными условиями того специального вида, который мы искали. В общем случае ни одно этих частных решений не удовлетворяет начальным условиям, и решение задачи, как обычно, приходится искать в виде ряда по найденным функциям специального вида. Таким образом, для завершения решения задачи требуется исследовать уравнение (11) с точки зрения количества и расположения его корней, а также рассмотреть случай $\beta = -\omega^2 < 0$, за счёт которого могут возникнуть дополнительные составляющие сложного движения.

Список литературы

1. Александров, В.А. Обобщённые функции: Учеб. пособие [Текст] / В. А. Александров. – Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2005. – 46 с.

2. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними [Текст] / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 470 с.
3. Дрожжинов, Ю. Н. Введение в теорию обобщенных функций [Текст] / Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов // Лекционные курсы НОЦ. – Вып.5. – М.: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2006. – 164 с.
4. Кеч, В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике [Текст] / В. Кеч, П. Теодореску. – М. : Мир, 1978. – 520 с.
5. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Физматлит, 2004. – 572 с.
6. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М. : Мир, 1985. - 384 с.